Introdução aos Escoamentos Compressíveis

José Pontes, Norberto Mangiavacchi e Gustavo R. Anjos

GESAR – Grupo de Estudos e Simulações Ambientais de Reservatórios
UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

30 de julho a 5 de agosto de 2017

GESAR The Group for Environmental Studies in Reservoirs

UERJ UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

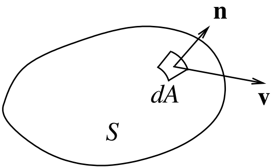
impa

Conteúdo do curso

1. Escoamentos tridimensionais:
   1.1 Equações Básicas;
   1.2 Escoamentos Potenciais Compressíveis.
2. Escoamentos quase unidimensionais:
   2.1 Escoamentos Isoentrópicos;
   2.2 Choque Normal;
   2.3 Escoamentos com Transf. de Calor – Linha de Rayleigh;
   2.4 Escoamentos com Atrito – Linha de Fanno;
   2.5 Choque Oblíquo.
3. Resolução Numérica de Escoamentos Compressíveis.

Conservação da massa

Conservação da massa:



$$\begin{pmatrix}\text{Taxa de acumulação de massa dentro do volume}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\text{Fluxo líquido de massa para fora do volume}\end{pmatrix}$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oint_S \rho\, v_j n_j \, dA \qquad \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Teorema de Gauss:

$$\int_V \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dV = \oint_S v_j n_j \, dA \qquad \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Conservação da massa

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oint_S \rho\, v_j n_j\, dA = -\int_V \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} dV$$

Forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)}^{D/Dt} \rho + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Incompressível: $\dfrac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$ $\qquad \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0$

Conservação da massa

Aplicação da forma integral: permanente, velocidade uniforme nas entradas e saídas:

$$-\sum(\rho Au)_{\mathrm{entradas}} + \sum(\rho Au)_{\text{saídas}} = 0$$

$$\sum(\rho Au)_s = \sum(\rho Au)_e$$

Apenas uma entrada e uma saída:

$$\rho Au = C^{te}$$

Na forma diferencial:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} = 0$$

Conservação da quantidade de movimento

Acumulação e transporte de um escalar

$$\int_V \frac{\partial \rho X}{\partial t} \, dV = - \oint_S \rho X v_j n_j \, dA$$

onde X é um escalar por unidade de massa.

$$\begin{aligned}
X &= v_i && \textit{quant. mov/kg} \\
&= v^2/2 && \textit{energia cinética/kg} \\
&= e = C_v T && \textit{energia térmica/kg} \\
&= h = C_p T && \textit{entalpia/kg} \\
&= C_p T + v^2/2 && \textit{(entalpia+cinética)/kg} \\
&= s && \textit{entropia/kg}
\end{aligned}$$

Conservação da quantidade de movimento

Quantidade de movimento

$$\begin{pmatrix}\text{Taxa de acumulação} \\ \text{de quantidade de mo-} \\ \text{vimento dentro do vo-} \\ \text{lume de controle}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\text{Fluxo líquido de} \\ \text{quantidade de movi-} \\ \text{mento para fora do} \\ \text{volume}\end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix}\text{Resultante das forças} \\ \text{de superfície}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Resultante das for-} \\ \text{ças de volume}\end{pmatrix}$$

$$\int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV = -\oint_S \rho v_i v_j n_j dA + \oint_S \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho g_i dV$$

Forças de superfície: $dF_i = \sigma_{ij} n_j dA$

Conservação da quantidade de movimento

Aplicando o teorema de Gauss:

$$\int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV = -\int_V \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho g_i dV$$

Para um volume infinitesimal:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j}}_{\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) v_i = \rho \frac{D v_i}{D t}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

Decomposição do tensor de tensões: pressão e tensor desviatório (viscoso):

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Conservação da quantidade de movimento

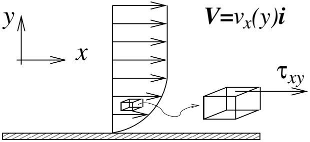
$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\tau + \mathbf{g}$$

Fluidos newtonianos

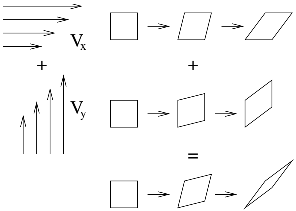
$\tau_{xy} \longrightarrow$ Tensão de cisalhamento na direção x, atuando na face y.

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$



$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$



Equação de Navier-Stokes (incompressível)

Eq. de Navier-Stokes = Quant. mov. + Newtoniano

Forma dimensional:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g}$$

Forma adimensional:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2}\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \quad \textit{onde:} \begin{cases} Re = \dfrac{Ud}{\nu} \\ Fr = \dfrac{u}{\sqrt{gh}} \end{cases}$$

Equação de Euler

Eq. de Euler $\longrightarrow$ ordem mais baixa do que Navier-Stokes.

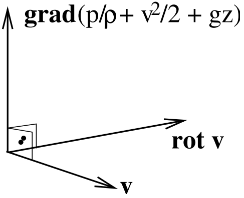
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\,\mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\, p + \mathbf{g}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{v_j v_j}{2} - \epsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad}\,\frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\, p + \mathbf{g}
\end{aligned}
$$

Equação de Bernoulli

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad}\left(P + \frac{v^2}{2} + gz\right) = \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$$

$$\text{onde :} \quad P = \int \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i = \int \frac{dp}{\rho}$$



Campo irrotacional, permanente e incompressível:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz &= Y \quad \textit{Energia específica;}\\
\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z &= H \quad \textit{Altura de carga;}\\
p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z &= P_0 \quad \textit{Pressão de estagnação.}
\end{aligned}$$

Escoamentos potenciais incompressíveis

Se $\textbf{rot}\,\mathbf{v} = 0 \longrightarrow \mathbf{v} = \textbf{grad}\,\phi \qquad v_i = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$

Continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nabla^2 \phi = 0 \qquad \textit{(Equação de Laplace)}$$

Campo *linear* e desacoplado da pressão.

Pressão $\longrightarrow$ Navier-Stokes.

Termo viscoso:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

A viscosidade não atua em potenciais incompressíveis.

Equação da circulação

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt}dx_i = \oint_C \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}dx_i + \oint_C \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}dx_i$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}dx_i$$

Se $p = p(\rho, s) = p(\rho) \longrightarrow \oint_C \frac{dp}{\rho} = 0$

Teorema de Bjerknes – Na ausência de efeitos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{dp}{\rho}$$

Teorema de Kelvin – Na ausência de efeitos termodinâmicos e viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

Equação da energia total

$$
\begin{pmatrix}\text{Taxa de acumulação de } m(e+v^2/2) \text{ dentro do}\\ \text{volume de controle}\end{pmatrix}
=
-\begin{pmatrix}\text{Fluxo líquido de } \dot{m}(e+\\ v^2/2) \text{ para fora do vo-}\\ \text{lume}\end{pmatrix}
+\begin{pmatrix}\text{Trabalho das forças de}\\ \text{superfície por unidade}\\ \text{de tempo}\end{pmatrix}
+\begin{pmatrix}\text{Trabalho das forças de}\\ \text{volume por unidade de}\\ \text{tempo}\end{pmatrix}
-\overbrace{\begin{pmatrix}\text{Fluxo líquido de calor}\\ \text{para fora do volume}\end{pmatrix}}^{\mathbf{q}\,=\,-\kappa\,\mathbf{grad}\,T}
+\begin{pmatrix}\text{Taxa de geração de calor dentro do}\\ \text{volume}\end{pmatrix}
$$

Equações: energia total, entalpia de estagnação, entropia

Energia total:

$$\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho}\nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Entalpia total: soma-se $\partial p/\partial t$ aos dois membros e rearranja-se os termos:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho}\nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}.$$

onde: $$h_0 = h + \frac{v^2}{2} \longrightarrow C_p T_0 = C_p T + \frac{v^2}{2}$$

Entropia:

$$T\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho}\tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho}\nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}$$

Equação potencial dos escoamentos compressíveis

Hipóteses:

1. Equação de Euler;
2. $\textbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$;
3. Isoentrópico: $p = p(\rho, s) = p(\rho)$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

onde: $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ = velocidade do som.

$a^2 = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T}$ (Gases perfeitos).

Obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + 2\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)$$

Equação potencial dos escoamentos compressíveis

Casos particulares:

1. Tridimensional permanente:

$$\left(v_i v_j - a^2 \delta_{ij}\right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$$

2. Tridimensional permanente, $v_x \gg v_y, v_z$ (Esbeltos, baixo ângulo de ataque, fora do transônico):

$$(1 - M^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$$

(Pequenas velocidades perpendiculares ao incidente).

3. Tridimensional não permanente, $v^2 \ll a^2$:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \phi_{tt} \qquad \textit{(Equação de ondas)}$$

Equação potencial dos escoamentos compressíveis

4. Tridimensional permanente, $v^2 \ll a^2$:

$$\nabla^2 \phi = 0 \qquad \textit{(Equação de Laplace)}$$

5. Bidimensional permanente:

$$(v_x^2 - a^2)\phi_{xx} + (v_y^2 - a^2)\phi_{yy} + 2 v_x v_y \phi_{xy} = 0$$

6. Unidimensional não permanente:

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a^2}\left(v_x^2 \phi_{xx} + \phi_{tt} + 2 v_x \phi_{tx}\right)$$

7. Unidimensional não permanente, $v^2 \ll a^2$:

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a^2}\phi_{tt} \quad \longrightarrow \quad \phi = f(x \pm at)$$

GESAR The Group for Environmental Studies in Reservoirs
UERJ Universidade do Estado do Rio de Janeiro
impa

Uma classificação das EDPs

Campo bidimensional:

$$\begin{aligned}(v_x^2 - a^2)\phi_{xx} + 2v_x v_y \phi_{xy} + (v_y^2 - a^2)\phi_{yy} &= 0 \\ A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D &= 0\end{aligned}$$

Características: curvas $\Sigma = (x(\sigma), y(\sigma))$ sobre as quais as derivadas da velocidade são descontínuas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

1. Elíptica, se $B^2 - 4AC < 0$ (não há características):
2. Parabólica, se $B^2 - 4AC = 0$ (uma família);
3. Hiperbólica, se $B^2 - 4AC > 0$ (duas famílias).

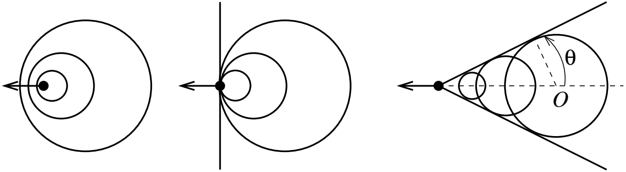
GESAR The Group for Environmental Studies in Reservoirs UERJ Universidade do Estado do Rio de Janeiro impa

Uma classificação das EDPs

1. $v^2 < a^2 \Longrightarrow$ elíptica;
2. $v^2 = a^2 \Longrightarrow$ parabólica;
3. $v^2 > a^2 \Longrightarrow$ hiperbólica.

Hiperbólica, com $v_y = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\pm\theta) = \pm\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{M}$$



(a) (b) (c)

Uma classificação das EDPs

Problemas parabólicos: qualquer perturbação é instantaneamente percebida em todo o campo (dentro da hipótese de meio contínuo);

Problemas hiperbólicos: os sinais têm velocidade de propagação finita. O campo divide-se em uma região que recebe sinais e a zona de silêncio.