

Apêndice B

Elementos de Cálculo Vetorial

B.1 Introdução

Este apêndice aborda importantes conceitos do cálculo vetorial, essenciais para formulação das leis que regem a mecânica dos meios contínuos. São revistos o conceito dos operadores *gradiente*, *divergente* e *rotacional*, os teoremas de Gauss e de Stokes e apresentada a notação de tensorial cartesiana, também chamada de notação de índices ou de Einstein. Essa notação apresenta nítidas vantagens sobre a vetorial, usada tradicionalmente nos textos introdutórios de mecânica dos meios contínuos, o que justifica, no nosso entender, o esforço inicial de assimilação, necessário. A notação de índices permite que as equações se expressem de forma compacta, o que facilita sua compreensão.

A demonstração de várias identidades vetoriais se simplifica igualmente, quando se usa a notação cartesiana. Algumas dessas identidades são demonstradas nesse apêndice e outras são deixadas como exercícios. Em alguns problemas da mecânica dos fluidos, como por exemplo no da relação entre efeitos viscosos e de variação da energia interna de uma partícula de fluido, o uso da notação de índices permite que se obtenha facilmente a relação entre os dois efeitos. O mesmo trabalho se torna extremamente penoso quando se utiliza a notação vetorial.

B.2 Principais Operadores Vetoriais e Teoremas

B.2.1 Operador gradiente

O *gradiente* de uma função escalar f é definido, em coordenadas cartesianas, como o vetor cujas componentes são as derivadas parciais de f :

$$\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

ou

$$\mathbf{grad} f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i,$$

onde $\partial f/\partial x_i$ é a componente do gradiente na direção x_i .

O gradiente de um escalar é um vetor, orientado no sentido em que a variação da função f é máxima. Cabe notar que a variação da função na direção perpendicular ao gradiente é nula. De fato, o valor da função em um ponto $\mathbf{X}^1 = x_1^1 \mathbf{e}_1 + x_2^1 \mathbf{e}_2 + x_3^1 \mathbf{e}_3$, localizado na vizinhança de um ponto $\mathbf{X}^0 = x_1^0 \mathbf{e}_1 + x_2^0 \mathbf{e}_2 + x_3^0 \mathbf{e}_3$, é dado aproximadamente por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}^1) &= f(\mathbf{X}^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2^1 - x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_3^1 - x_3^0) \\ &= f(\mathbf{X}^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3 \\ &= f(\mathbf{X}^0) + \mathbf{grad} f \cdot \Delta \mathbf{X} \\ &= f(\mathbf{X}^0) + |\mathbf{grad} f| |\Delta \mathbf{X}| \cos \theta \end{aligned}$$

o que mostra que a variação da função é máxima na direção do gradiente, quando $\cos \theta = 1$.

Em coordenadas cilíndricas, o operador gradiente toma a forma:

$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{B.1})$$

Em coordenadas esféricas:

$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (\text{B.2})$$

Podemos também definir o gradiente de um vetor, como por exemplo, da velocidade de uma partícula de fluido. Sendo \mathbf{v} o vetor velocidade, de coordenadas $(v_x, v_y \text{ e } v_z)$, o gradiente da velocidade terá nove elementos, que podemos agrupar em uma matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

A forma geral de um elemento do gradiente de velocidades é dada por $\partial v_i/\partial x_j$ onde v_i é componente da velocidade na direção i e x_j é coordenada na direção j . A ação do operador gradiente sobre uma função f resulta em uma grandeza de *ordem* mais elevada, como esquematizado abaixo:

f	$\mathbf{grad} f$
escalar (tensor de ordem zero)	vetor (tensor de ordem um)
vetor (tensor de ordem um)	matriz (tensor de ordem dois)

Essa propriedade se reflete no número de índices da variável. Por exemplo:

escalar:	T
vetor:	$v_i, \partial T/\partial x_i$
tensor de segunda ordem:	$\partial v_i/\partial x_j$

B.2.2 Operador divergente

Divergente de um vetor

O divergente de um vetor é dado, em um sistema de coordenadas cartesianas, por:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k})$$

O divergente reduz a ordem de um tensor. Assim, o divergente de um vetor é um escalar e o divergente de um tensor de segunda ordem é um tensor de primeira ordem, ou um vetor.

Procuramos dar uma interpretação ao divergente de um campo vetorial. Consideremos um elemento de fluido submetido a um fluxo de calor, conforme mostrado na Fig. (B.1):

$$\mathbf{q}(x, y, z) = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}.$$

Fazemos um balanço da quantidade de calor que é transferida para fora do elemento, menos a que é transferida para dentro.

Fazendo o balanço do fluxo de calor temos que a quantidade de calor acumulada no elemento, por unidade de tempo, devido à componente do fluxo na direção x , é dada por:

$$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - q_x \Delta y \Delta z = \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Nas direções y e z temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z - q_y \Delta x \Delta z &= \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \\ \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - q_z \Delta x \Delta y &= \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Somando-se as três contribuições obtém-se a quantidade de calor acumulada no elemento considerado, por unidade de tempo:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Dividindo-se a expressão acima por $\Delta x \Delta y \Delta z$ obtemos:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{q}$$

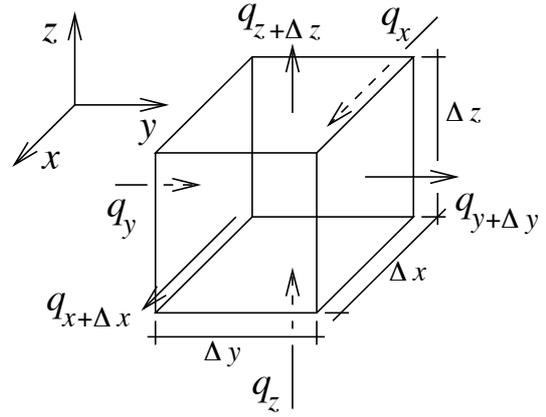


Figura B.1: Fluxo de calor através das paredes de um elemento de fluido.

Unidades de $\text{div } \mathbf{q}$:

$$[\text{div } \mathbf{q}] = \frac{\frac{\text{calor/tempo}}{\text{área}}}{\text{comprimento}} = \frac{\text{calor/tempo}}{\text{volume}},$$

o que mostra que o divergente do fluxo de calor representa a variação da energia interna por unidade de tempo e de volume, no elemento infinitesimal de volume considerado. Cabe notar que, ao fazermos o balanço, calculamos a quantidade de calor que *sai* do elemento, menos a que *entra*. A taxa de acumulação de calor é portanto, dada pelo *negativo* do divergente do fluxo de calor.

O divergente de um vetor \mathbf{q} toma a forma, em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z}. \quad (\text{B.3})$$

Em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi}. \quad (\text{B.4})$$

Divergente de um tensor de segunda ordem

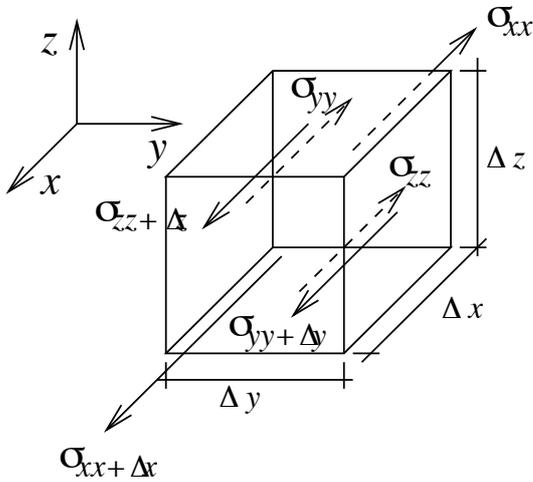


Figura B.2: Resultante das forças de superfície atuando sobre uma partícula de um meio contínuo, na direção x .

Essas forças resultam de tensões na direção x , que são as de cisalhamento que atuam nas faces y , $y + \Delta y$, z e $z + \Delta z$ e as normais, que atuam nas faces x e $x + \Delta x$. As tensões σ_{ij} são identificadas por dois índices, o primeiro referindo-se à direção da tensão e o segundo, à face em que a mesma atua.

Vimos na Sec. (B.2.1), que da mesma forma como calculamos o gradiente de um escalar, podemos calcular o gradiente de um vetor, obtendo um tensor de segunda ordem, representado por uma matriz. Gradientes de vetor ocorrem com frequência na mecânica dos meios contínuos, como no caso da equação de conservação da quantidade de movimento de fluidos. De forma semelhante, divergentes de tensores de segunda ordem ocorrem também nas equações da mecânica dos meios contínuos. Em particular, o divergente das tensões que atuam sobre a superfície de uma partícula de um contínuo é igual à resultante das forças de superfície que atuam sobre a mesma. Discutimos abaixo esse caso.

Consideramos uma partícula de um meio contínuo, conforme representado na Fig. (B.2) e calculamos a resultante das forças de superfície que atuam sobre a mesma,

A resultante de forças que atuam na direção x , devido às tensões normais atuando nas faces x e $x + \Delta x$ é dada por:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx+\Delta x}) \Delta y \Delta z - \sigma_{xx} \Delta y \Delta z &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \sigma_{xx} \Delta y \Delta z = \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta V \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Nas faces y , $y + \Delta y$ e z e $z + \Delta z$:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xy+\Delta y}) \Delta x \Delta z - \sigma_{xy} \Delta x \Delta z &= \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z - \sigma_{xy} \Delta x \Delta z = \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Delta V \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{xz+\Delta z}) \Delta x \Delta y - \sigma_{xz} \Delta x \Delta y &= \left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - \sigma_{xz} \Delta x \Delta y = \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \Delta V \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

A resultante de forças na direção x , devido às tensões nessa direção, atuando nas seis faces da partícula do meio contínuo é dada pela soma do último termo das expressões (B.5, B.6 e B.7). Obtém-se:

$$dF_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \Delta V$$

A acima mostra que a resultante das forças na direção x , que atuam sobre o elemento do contínuo, é dada pelo divergente das tensões nessa direção, multiplicado pelo volume do elemento.

Reescrevemos a equação acima na notação de índices, em que substituímos dF_x por dF_1 , $\partial \sigma_{xx}$, $\partial \sigma_{xy}$ e $\partial \sigma_{xz}$ por $\partial \sigma_{11}$, $\partial \sigma_{12}$ e $\partial \sigma_{13}$, respectivamente e ∂x , ∂y e ∂z por ∂x_1 , ∂x_2 e ∂x_3 , respectivamente. Obtemos:

$$dF_1 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \Delta V$$

Procedendo de forma análoga obtemos as equações para a resultante das forças nas direções y e z , que atuam sobre o elemento do contínuo. Agrupando os três elementos na forma de um vetor, obtemos:

$$\begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} \end{pmatrix} \Delta V$$

O elemento geral desse vetor é da forma:

$$dF_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \Delta V$$

O resultado acima mostra que as tensões que atuam na superfície de um elemento do meio contínuo formam uma matriz ou um tensor de segunda ordem, representado por uma matriz. É fácil ver que o divergente dessa matriz, é um vetor, cujos elementos são os divergentes dos vetores formados pelos elementos de cada linha da matriz. A resultante das forças que atuam sobre o elemento é dada pelo divergente do tensor, multiplicado pelo volume do elemento.

B.2.3 Teorema de Gauss

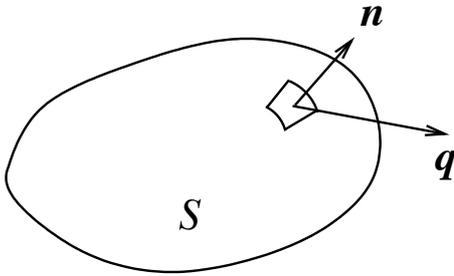


Figura B.3: Volume de controle ao qual se aplica o teorema de Gauss. \mathbf{n} é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície no ponto considerado.

O teorema de Gauss generaliza o resultado acima, para o caso de um volume finito. Consideremos um volume V , fixo no espaço e simplesmente conexo, conforme mostrado na Fig. (B.3). O volume é limitado externamente por uma superfície S . Seja \mathbf{n} o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície e orientado para fora e \mathbf{q} , um campo vetorial definido no espaço onde se encontra o volume considerado. O teorema de Gauss estabelece que:

$$\int_V \text{div } \mathbf{q} dV = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{B.8})$$

Tendo em vista o teorema de Gauss podemos definir o divergente de um vetor \mathbf{q} , de forma independente do tipo do sistema de coordenadas utilizado:

$$\text{div } \mathbf{q} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

B.2.4 Operador rotacional

O rotacional de um vetor é dado, no caso de um sistema de coordenadas cartesianas, por:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \mathbf{k} \quad (\text{B.9})$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \quad (\text{B.10})$$

Em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \mathbf{e}_\theta + \\ & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Consideremos a componente na direção \mathbf{k} do rotacional, $\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$. O esquema da Fig. (B.4) mostra que a tendência à rotação de uma partícula de fluido, devido à variação de v_y na direção x é contraposta pela variação de v_x na direção y . Esse exemplo mostra que o rotacional mede de alguma forma, a velocidade de rotação local do fluido. Essa questão é discutida na Sec. (B.3.1).

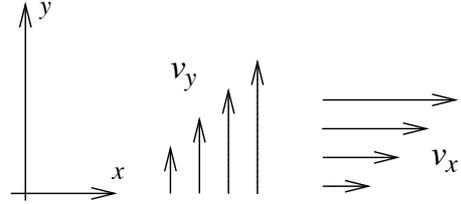


Figura B.4: Variação da componente de velocidade v_y na direção x e da componente de velocidade v_x na direção y . No caso, $\partial v_y / \partial x > 0$ e $\partial v_x / \partial y > 0$. A componente na direção z do rotacional desse campo de velocidades bidimensional é dado por $(\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y) \mathbf{k}$.

B.2.5 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um vetor \mathbf{v} através de uma superfície S é igual à integral de linha da projeção da velocidade sobre a tangente à curva Γ que limita a superfície considerada. Essa propriedade se expressa por:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

B.2.6 Outros Teoremas

Enunciamos abaixo outros importantes teoremas do cálculo vetorial [16]:

Teorema (Integração por partes): Sejam $\Omega \in \mathcal{R}^m$ e $\Gamma = \partial\Omega$, o contorno de Ω e $\phi, \psi : U \in \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$, dois campos escalares. Então:

$$\int_\Omega \phi \mathbf{grad} \psi \cdot \mathbf{n} d\Omega = \int_\Gamma \phi \psi d\Gamma - \int_\Omega \psi \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n} d\Omega.$$

Teorema (Primeiro teorema de Green): Sejam $\Omega \in \mathcal{R}^m$ e $\Gamma = \partial\Omega$, o contorno de Ω e $\phi, \psi : U \in \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$, dois campos escalares. Então:

$$\int_\Omega (\phi \nabla^2 \psi + \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \psi) d\Omega = \int_\Gamma \phi \mathbf{grad} \psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma.$$

Teorema (Segundo teorema de Green): Sejam $\Omega \in \mathcal{R}^m$ e $\Gamma = \partial\Omega$, o contorno de Ω e $\phi, \psi : U \in \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$, dois campos escalares. Então:

$$\int_\Omega (\phi \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \phi) d\Omega = \int_\Gamma \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma,$$

onde n é a coordenada ao longo da direção normal a Ω .

Teorema (Teorema de Green para campos vetoriais): Sejam $\Omega \in \mathcal{R}^m$ e $\Gamma = \partial\Omega$, o contorno de Ω e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, : U \in \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^m$, dois campos vetoriais. Então:

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{grad} \mathbf{u} : \mathbf{grad}^T \mathbf{v})] d\Omega = \int_{\Gamma} [(\mathbf{grad} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} d\Gamma.$$

B.3 Notação de Índices (Notação Tensorial Cartesiana)

Foi visto que as componentes de uma grandeza vetorial podem ser representadas através de um símbolo contendo um único índice. Por exemplo, a i -ésima componente de um vetor \mathbf{v} pode ser representada por v_i . No caso de uma matriz, ou de um tensor cartesiano de segunda ordem, são necessários *dois* índices para representar o elemento geral do mesmo. Assim, o elemento geral de uma matriz A se representa por a_{ij} e o elemento geral do gradiente de um vetor, por $\partial v_i / \partial x_j$. A estes índices se dá o nome de índices *livres*.

Constata-se que, na mecânica dos meios contínuos, que frequentemente os termos das equações contêm somatórios feitos sobre os valores de índices que aparecem duas vezes no termo. Se considerarmos, por exemplo, o caso do divergente de um vetor \mathbf{q} , temos:

$$\text{div } \mathbf{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

Outro exemplo é dado pela componente da aceleração de uma partícula de fluido na direção i :

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \frac{d}{dt} v_i(t, x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Observando que $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$ e que $dz/dt = v_z$ pode-se re-escrever a última expressão na forma:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Nos dois exemplos acima vê-se que, no case de algum termo conter um somatório, o índice sobre o qual se faz a soma aparece duas vezes. A informação de que se deve fazer uma soma já esta contida portanto na existência do índice repetido e pode-se portanto dispensar o sinal do somatório. Adota-se então na mecânica de meios contínuos, a notação de *índices*, ou dos *tensores cartesianos*, ou de *Einstein*, que consiste em suprimir o sinal do somatório. A existência de índices repetidos indica por si, que se deve efetuar o somatório sobre todos os valores daquele índice. Assim, o divergente de um vetor e a componente da aceleração

de uma partícula na direção i se escrevem, nesta notação:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{q} &= \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\end{aligned}$$

O índice repetido denomina-se *mudo*. Assim, na última expressão acima, j é um índice mudo e i é um índice livre. A denominação de *mudo* vem da variável muda das integrais, onde:

$$\int_0^Z x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^Z = \int_0^Z y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^Z = \frac{z^2}{2}.$$

Nesse caso x e y são as variáveis mudas podendo ser substituídas por qualquer letra que o resultado será sempre $z^2/2$.

A ordem do tensor é dada pelo número de índices livres. De fato, observa-se que não há índices livres na expressão do divergente de um vetor, que é efetivamente um escalar e que há um índice livre na expressão da aceleração de uma partícula, que é um vetor.

O teorema de Gauss, dado pela Eq. (B.8), pode ser re-escrito na notação tensorial cartesiana:

$$\int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV = \oint_S q_j n_j dA \quad (\text{B.12})$$

A Eq. (B.12) pode ser generalizada para o caso do divergente de tensores de segunda ordem. Tomando como exemplo o tensor de tensões que atuam sobre uma partícula do meio contínuo, temos:

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint_S \sigma_{ij} n_j dA \quad (\text{B.13})$$

Dois operadores são comumente utilizados quando se emprega a notação de índices: os operadores δ_{ij} e ϵ_{ijk} . O operador δ_{ij} é definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

O operador δ_{ij} representa de fato o elemento geral da matriz identidade,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que multiplicando um vetor \mathbf{a} dá como resultado o próprio vetor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

A última expressão pode ser re-escrita na seguinte forma, utilizando-se a notação de índices:

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{ij} a_j = a_i,$$

ou simplesmente:

$$\delta_{ij} a_j = a_i.$$

Como o resultado da multiplicação de a_j por δ_{ij} é a_i , o operador δ_{ij} é também denominado *operador de troca de índices*. De fato, as componentes b_i de um vetor qualquer podem ser representadas por $\delta_{ij} b_j$. Pode-se verificar sem dificuldades que, em particular,

$$\frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (\text{B.14})$$

Esse resultado, reescrito em notação vetorial, toma a forma:

$$\text{div}(p\mathbf{1}) = \mathbf{grad} p \quad (\text{B.15})$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade. As identidades (B.14) e (B.15) são usadas no capítulo 3, para simplificar a equação de conservação da quantidade de movimento (Eq.). A variável p representa a pressão local, que atua sobre o elemento de fluido.

O operador ϵ_{ijk} é definido da seguinte forma: $\epsilon_{ijk} = 1$ se o valor dos índices i, j e k forem, respectivamente, 1, 2, 3, ou 3, 1, 2, ou 2, 3, 1 (ordem *cíclica*); $\epsilon_{ijk} = -1$ se o valor dos índices forem 3, 2, 1, ou 1, 3, 2, ou 2, 1, 3 (ordem *anti-cíclica*); $\epsilon_{ijk} = 0$ se dois ou mais índices tiverem o mesmo valor. Esse operador é usado para representar o produto vetorial e o rotacional de um vetor, como mostrado a seguir.

Vejamos inicialmente a representação do produto vetorial, utilizando o operador ϵ_{ijk} . Consideremos a expressão $\epsilon_{ijk} a_j b_k$, onde a_j e b_k são as componentes nas direções j e k dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , respectivamente. $\epsilon_{ijk} a_j b_k$ representa as componentes de um *vetor*, pois tem apenas um índice livre, i . Os índices j e k são repetidos e indicam que se deve somar sobre todos os valores dos mesmos, isto é:

$$\epsilon_{ijk} a_j b_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Para $i = 1$ temos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= 1 & \epsilon_{132} &= -1 \\ \epsilon_{111} &= \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{121} = \epsilon_{122} = \epsilon_{131} = \epsilon_{133} = 0 \\ \epsilon_{1jk} a_j b_k &= a_2 b_3 - a_3 b_2. \end{aligned}$$

Para $i = 2$ temos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{231} &= 1 & \epsilon_{213} &= -1 \\ \epsilon_{211} &= \epsilon_{212} = \epsilon_{221} = \epsilon_{222} = \epsilon_{223} = \epsilon_{232} = \epsilon_{233} = 0 \\ \epsilon_{2jk} a_j b_k &= a_3 b_1 - a_1 b_3. \end{aligned}$$

Para $i = 3$ temos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{312} &= 1 & \epsilon_{321} &= -1 \\ \epsilon_{311} &= \epsilon_{313} = \epsilon_{322} = \epsilon_{323} = \epsilon_{331} = \epsilon_{332} = \epsilon_{333} = 0 \\ \epsilon_{3jk}a_jb_k &= a_1b_2 - a_2b_1.\end{aligned}$$

As expressões $a_2b_3 - a_3b_2$, $a_3b_1 - a_1b_3$ e $a_1b_2 - a_2b_1$ são, respectivamente, as componentes do produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, nas direções \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} .

Vejam agora a representação do rotacional de um campo vetorial, utilizando o operador ϵ_{ijk} . Consideremos a expressão:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

e mostremos a seguir que a mesma representa de fato o termo geral das componentes do rotacional de um campo vetorial \mathbf{v} :

Para $i = 1$, $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{132} = -1$ e todos os demais valores de ϵ_{1jk} são nulos, conforme o exemplo anterior. Temos então:

$$\epsilon_{1jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

Para $i = 2$, $\epsilon_{231} = 1$, $\epsilon_{213} = -1$ e todos os demais valores de ϵ_{2jk} são nulos. Temos então:

$$\epsilon_{2jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Analogamente, para $i = 3$, $\epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{321} = -1$ sendo os demais valores de ϵ_{3jk} nulos.

$$\epsilon_{3jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Os termos acima são as componentes de $\mathbf{rot} \mathbf{v}$.

B.3.1 Outras propriedades vetoriais

Demonstramos a seguir, duas outras propriedades vetoriais:

1. Se $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, onde $\boldsymbol{\omega}$ é constante, então $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}$.
2. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \equiv \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$.

Para mostrarmos a validade das duas propriedades acima necessitamos da seguinte identidade que é apresentada sem demonstração:

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{kpq} \equiv \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}.$$

A primeira propriedade relaciona o rotacional do campo com a velocidade angular quando esta é constante, isto é, independente da posição no espaço.

Temos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot} \mathbf{v} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \\ \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \longrightarrow v_k = \epsilon_{kpq} \omega_p r_q\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot} \mathbf{v} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{kpq} \omega_p r_q = \epsilon_{ijk} \epsilon_{kpq} \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_p r_q) = (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_p r_q) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ip} \omega_p \delta_{jq} r_q - \delta_{jp} \omega_p \delta_{iq} r_q) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_i r_j - \omega_j r_i) = \omega_i \frac{\partial r_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial r_i}{\partial x_j}\end{aligned}$$

Mas, sendo $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_j}{\partial x_j} &= \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = 3 \\ \frac{\partial r_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \omega_i \frac{\partial r_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = 3\omega_i - \omega_j \delta_{ij} = 3\omega_i - \omega_i = 2\omega_i$$

e:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}$$

A demonstração da propriedade $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} / 2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$ se faz de forma semelhante, utilizando-se a identidade $\epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$.

Reescrevemos inicialmente, cada um dos termos da igualdade, usando a notação de índices:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} &\longrightarrow v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} &\longrightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j v_j) = \frac{1}{2} \left(v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ -\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} &\longrightarrow -\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{kpq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p}\end{aligned}$$

O desenvolvimento dos termos do membro direito da igualdade demonstra a propriedade:

$$\begin{aligned}v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{kpq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} &= v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} v_j \frac{\partial v_q}{\partial x_p} = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) v_j \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \\ v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \left(v_j \delta_{ip} \delta_{jq} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} - v_j \delta_{iq} \delta_{jp} \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \right) &= v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \left(v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\end{aligned}$$

B.4 O Teorema de Helmholtz (Teorema Fundamental do Cálculo Vetorial)

Uma das mais importantes proposições do cálculo vetorial é o teorema de Helmholtz que estabelece [48, 23]:

Teorema: Seja $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ um campo vetorial contínuo, com primeiras derivadas contínuas, definido em um domínio V' , cuja superfície externa é S' . $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ tem uma decomposição única na forma da soma do negativo do gradiente de um escalar $\phi(\mathbf{r})$ com o rotacional de um campo vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.16})$$

onde o potencial escalar $\phi(\mathbf{r})$ e o campo $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ são dados por:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n} dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{B.18})$$

com os campos vetoriais $\mathbf{grad} \phi$ e $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ ortogonais entre si. O domínio V' deve ser escolhido de forma que $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ seja paralelo à superfície S' em cada ponto.

Se o domínio de integração se estender por todo \mathcal{R}^3 as integrais de superfície acima se anulam.

B.4.1 Existência e construção da decomposição

Tendo-se em conta que:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dV &= \int_V \text{div} \mathbf{grad} \left(\frac{1}{R} \right) dV = \\ &= - \int_V \text{div} \left(\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \right) dV = - \int_V \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left[R^2 \left(\frac{1}{R^2} \right) \right] dV = \\ &= - \oint_S \left(\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \right) \cdot \mathbf{n} dA = \begin{cases} -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \cdot \mathbf{e}_R 4\pi R^2 = -4\pi & \text{se } V \text{ contiver a origem} \\ 0 & \text{se } V \text{ não contiver a origem,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, com $|\mathbf{R}| = R$. Sendo $\delta(\mathbf{R}) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ pode-se escrever:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Decorre dessa propriedade que qualquer função vetorial suficientemente regular $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \int_{V'} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dV' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \int_{V'} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} \right) dV', \end{aligned}$$

onde a integração se estende por qualquer região que contenha o ponto \mathbf{r} . Observamos que, na última expressão, o operador ∇ não atua sobre as variáveis de \mathbf{r}' . Usando a identidade $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$ (ver exercício 2, Pág. 339) reescrevemos a última equação como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} \nabla \times \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV' - \frac{1}{4\pi} \nabla \int_{V'} \nabla \cdot \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV', \quad (\text{B.19})$$

onde os operadores rotacional e divergente não atuam sobre as variáveis de \mathbf{r}' .

Notamos que, sendo $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ as derivadas em relação às variáveis de \mathbf{r}' são iguais ao negativo das derivadas em relação às variáveis de \mathbf{r} . Denotando por ∇' o operador que atua sobre as variáveis de \mathbf{r}' , têm-se para o integrando do membro direito da equação acima, contendo o operador divergente:

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \right] = \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{R} = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R}$$

O termo da Eq. B.19, contendo a integral do divergente escreve-se então:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV' = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV'.$$

Aplicando-se o teorema de Gauss ao primeiro termo do membro direito da equação acima obtém-se o potencial escalar da decomposição de Helmholtz, conforme Eq. B.17:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Lembrando que o operador ∇ só atua sobre os termos de \mathbf{r} temos para o integrando do termo da Eq. B.19 contendo o rotacional:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} \right) \right] &\longrightarrow \left[\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{R} \right) \right] F_k \longrightarrow \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') = \\ &-\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = \mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} \right]. \end{aligned}$$

A integral contendo o rotacional na Eq. B.19 toma então a forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV' &= \\ \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV'. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

A última integral da Eq. B.20 transforma-se como segue:

$$-\int_{V'} \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV' = \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n} dA'}{R}. \quad (\text{B.21})$$

Essa transformação é consequência da seguinte:

Proposição: Sejam $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ um campo vetorial contínuo definido no \mathcal{R}^3 , V um volume definido nesse espaço e S , a superfície que o delimita. Então:

$$\int_V \mathbf{rot} \mathbf{X} dV = - \oint_S \mathbf{X} \times \mathbf{n} dA, \quad (\text{B.22})$$

Demonstremos esse resultado: Seja \mathbf{c} um vetor constante; temos então que:

$$\text{div} (\mathbf{X} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{c}.$$

Como \mathbf{c} é constante essa igualdade reduz-se a:

$$\text{div} (\mathbf{X} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X}.$$

Integrando a equação acima no volume V , usando o teorema de Gauss e notando que \mathbf{c} é um vetor constante escrevemos:

$$\int_V \text{div} (\mathbf{X} \times \mathbf{c}) dV = \int_V \mathbf{c} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X} dV = \mathbf{c} \cdot \int_V \mathbf{rot} \mathbf{X} dV = \oint_S (\mathbf{X} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} dA.$$

Observando que $(\mathbf{X} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{X}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{n})$ temos então:

$$= \mathbf{c} \cdot \int_V \mathbf{rot} \mathbf{X} dV = -\mathbf{c} \cdot \oint_S (\mathbf{X} \times \mathbf{n}) dA.$$

Excluindo a multiplicação escalar das integrais da equação acima pelo vetor \mathbf{c} a proposição fica demonstrada. Em vista desse resultado escrevemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV' = \\ & \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV' = \\ & \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n} dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{A}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

que é o potencial vetorial da decomposição de Helmholtz, conforme Eq. B.18.

B.4.2 Ortogonalidade dos campos $\mathbf{grad} \phi$ e $\mathbf{rot} \mathbf{A}$

Como etapa preliminar à demonstração da unicidade da decomposição mostramos ortogonalidade entre $\mathbf{rot} \mathbf{A}$ e $\mathbf{grad} \phi$, expressa por:

$$\int_V \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \phi dV = 0.$$

Notando que:

$$\text{div} (\phi \mathbf{rot} \mathbf{A}) = \phi \text{div} \mathbf{rot} \mathbf{A} + \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \phi,$$

notando que $\text{div} \mathbf{rot} \mathbf{A} = 0$ e usando o teorema de Gauss obtemos, sucessivamente:

$$\int_V \text{div} (\phi \mathbf{rot} \mathbf{A}) dV = \int_V \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \phi dV = \oint_S \phi \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dA = 0,$$

pois, por hipótese, $\mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$. $\mathbf{rot} \mathbf{A}$ e $\mathbf{grad} \phi$ são portanto dois campos ortogonais entre si.

B.4.3 Unicidade da decomposição

Para demonstrarmos a unicidade da decomposição de Helmholtz supomos que $\mathbf{u} = \mathbf{grad} \phi_1 + \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 = \mathbf{grad} \phi_2 + \mathbf{rot} \mathbf{A}_2$ sejam duas decomposições distintas. Então:

$$\mathbf{grad} (\phi_1 - \phi_2) + \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2 = 0.$$

Fazendo o produto escalar da equação acima por $\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2$ obtemos:

$$\int_V \{ \|\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2\|^2 + (\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{grad} (\phi_1 - \phi_2) \} dV = 0.$$

Como $\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2$ e $\mathbf{grad} (\phi_1 - \phi_2)$ são ortogonais o produto escalar dos dois campos se anula e temos então que:

$$\int_V \|\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{rot} \mathbf{A}_2\|^2 dV = 0,$$

o que implica em $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ e, conseqüentemente, em $\phi_1 = \phi_2$, o que demonstra a unicidade da decomposição de Helmholtz.

B.5 Aplicação ao Método de Elementos Finitos – O Método da Projeção

O teorema de Helmholtz é base do Método da Projeção¹[15], usado na resolução dos sistemas algébricos lineares que resultam das discretizações espacial e temporal das equações da hidrodinâmica. Simplificadamente, podem-se dividir os métodos de resolução de sistema linear em duas classes:

1. Métodos acoplados;
2. Métodos desacoplados;

Os métodos acoplados resolvem o sistema completo de forma direta a cada passo de tempo. No entanto, resolver as equações de Navier-Stokes com viscosidade variável e transporte de espécie química torna tal procedimento oneroso devido ao forte acoplamento entre velocidade e pressão e suas fortes não-linearidades particulares vindas dos termos convectivos. Como exemplo, pode-se citar o escoamento simples de um fluido em 3 dimensões. Para este caso, são necessárias três equações de movimento e uma equação de conservação de massa, todas acopladas, chegando ao total de quatro equações. Usando elementos finitos e uma malha de quatrocentos nós (malha pouco refinada) calcula-se, a cada passo de tempo, mil e seiscentas equações. Para problemas que envolvem outras variantes, como variação na viscosidade e transporte de espécie química, o custo computacional se torna ainda mais elevado. É neste

¹Esta seção é baseada na dissertação de mestrado do Dr. Gustavo Rabello dos Anjos (2007)[15], defendida no Programa Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação em Engenharia – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro – 2007, a quem os autores agradecem a cessão do texto.

contexto que se enquadra o presente trabalho, e para diminuir tais custos, o uso de métodos desacoplados se torna necessário.

Os métodos desacoplados separam as dependências internas das equações possibilitando uma resolução sequencial do problema sem que haja a necessidade de se resolver todo o sistema a cada ciclo computacional. Diversos são os métodos capazes de realizar tal operação, dentre eles, o método da projeção vem sendo largamente utilizado. Tal método foi introduzido por Chorin (1968)[11], seguido por muitos outros autores, tais como Patankar (1980)[50] com o método SIMPLE e Harlow & Welch (1965)[26] com o método MAC. O método da projeção pode ser aplicado de diversas maneiras, dando origem a métodos contínuos, semi-discretos e discretos.

B.5.1 Método da Projeção

O método da projeção parte do prescrito pelo teorema de Helmholtz (Sec B.4) que mostra que qualquer campo vetorial pode ser decomposto na soma do gradiente de um campo escalar como rotacional de um potencial vetorial \mathbf{A} .

Para entender a teoria do método da projeção é necessário interpretar as equações de Navier-Stokes como projeções. Para simplificar, considera-se as equações na forma conservativa em todo o domínio Ω e considere ainda viscosidade μ e a massa específica ρ constantes:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (\text{B.23})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.24})$$

Assim, escreve-se (B.23) como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{S}(\mathbf{v}) \quad \text{onde} \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} - \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \quad (\text{B.25})$$

$\mathbf{S}(\mathbf{u})$ não tem, em geral, divergência e rotacional nulos. Observe ainda que:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$\nabla \times \nabla p = 0 \quad (\text{B.27})$$

A Eq. (B.25), segundo Chorin (1968)[11], pode ser interpretada utilizando-se a Eq. (B.16), o vetor $\mathbf{S}(\mathbf{v})$ é conhecido e pode ser projetado em ambos os subespaços de divergência nula ($\partial \mathbf{v} / \partial t$) e rotacional nulo (∇p), ou seja:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{P}[\mathbf{S}(\mathbf{v})] \quad \nabla p = \mathbf{Q}[\mathbf{S}(\mathbf{v})], \quad (\text{B.28})$$

onde \mathbf{P} e \mathbf{Q} são operadores de projeção, que satisfazem as seguintes propriedades:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \quad \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} \quad \mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P} = 0. \quad (\text{B.29})$$

Dado um vetor qualquer \mathbf{u} , \mathbf{P} projeta este vetor no espaço nulo do operador divergente e \mathbf{Q} o projeta no espaço nulo do operador rotacional, isto é:

$$\nabla \cdot \mathbf{P}[\mathbf{u}] = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega \quad (\text{B.30})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}[\mathbf{u}] = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega. \quad (\text{B.31})$$

Comparando as Eqs. (B.26 e B.28), obtêm-se, para os operadores de projeção:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \nabla(\nabla^2)^{-1}(\nabla) \quad (\text{B.32})$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} \quad (\text{B.33})$$

Para as equações de Navier-Stokes, esses operadores possibilitam o desacoplamento entre aceleração e pressão. Segundo Gresho [21], enquanto pressão e aceleração podem ser calculados sequencialmente, pressão e velocidade não podem ser desacoplados, pois estão fortemente acoplados em escoamentos incompressíveis. Ao desacoplar velocidade e pressão, uma correção da pressão desacoplada é recomendável para trabalhar com o campo de velocidade de forma adequada.

B.5.2 Método da Projeção Contínuo

O método da projeção contínuo procura fazer o desacoplamento entre as variáveis ainda na forma contínua do problema, ou seja, antes de serem discretizadas no espaço e no tempo. O primeiro passo do método de projeção consiste em resolver a aproximação:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{v}}) - \nabla \tilde{p}, \quad (\text{B.34})$$

onde \tilde{p} é uma aproximação da pressão, vinda das condições iniciais ou do passo anterior no algoritmo. Em geral $\tilde{p} \neq p$, por isso a velocidade intermediária $\tilde{\mathbf{v}}$ resultante não é solenoidal, desta forma $\tilde{\mathbf{v}}$ pode ser projetada no subespaço de divergência nula utilizando o operador P . Assim uma projeção solenoidal pode ser aproximada pela projeção:

$$\mathbf{u}_d = P[\tilde{\mathbf{v}}], \quad (\text{B.35})$$

que pode ser tomada como aproximação da solução real. Entretanto há dificuldades em aplicar o operador P diretamente pois ∇^2 só pode ser invertido através de uma função de *Green* [31]. Para evitar a operação de inversão do operador ∇^2 , outra aproximação é tomada: levando-se em conta a Eq. $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d + \nabla \varrho$, o passo de projeção pode ser feito utilizando-se seguinte decomposição:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}_d + \nabla \varrho \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_d = 0, \quad (\text{B.36})$$

ϱ é o multiplicador de *Lagrange* associado com a projeção da solução intermediária $\tilde{\mathbf{v}}$ no subespaço de dois vetores de divergência nula (\mathbf{v}_d) e rotacional nulo ($\nabla \varrho$). Como $\nabla \times \nabla \varrho = 0$, então $\nabla \times \tilde{\mathbf{v}} = \nabla \times \mathbf{v}_d$. Analisando a Eq. (B.36), pode-se resolver \mathbf{v}_d e ϱ através de dois passos:

1. Aplicando-se o operador divergente em (Eq. B.36), pode-se encontrar ϱ através da equação de *Poisson* resultante:

$$\nabla^2 \varrho = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (\text{B.37})$$

2. Conhecendo ϱ , calcula-se \mathbf{v}_d diretamente de B.36 na forma:

$$\mathbf{v}_d = \tilde{\mathbf{v}} - \nabla \varrho \quad (\text{B.38})$$

B.5.3 Método de Passo Fracionário

Este método parte das equações de Navier-Stokes já discretizadas no tempo. A idéia do método é aproximar as equações da continuidade calculando uma velocidade tentativa $\tilde{\mathbf{v}}$, utilizando a equação de conservação de quantidade de movimento sem o termo de pressão, em seguida projeta-se a velocidade tentativa no espaço de funções discretas de divergência nula.

$$\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \nabla \cdot [\nu(\nabla \mathbf{v}^{n+1} + \nabla(\mathbf{v}^{n+1})^T)] \quad (\text{B.39})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}. \quad (\text{B.41})$$

A pressão em (Eq. B.41) é encontrada aplicando-se o operador divergente e utilizando (Eq. B.40). Este procedimento resulta na equação de *Poisson* para a pressão dada por:

$$\nabla \cdot \nabla p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (\text{B.42})$$

Para a solução das Eqs. (B.39 e B.42), a imposição de condições de contorno se torna necessária, tanto para a velocidade $\tilde{\mathbf{v}}$ quanto para pressão p .

B.5.4 Método da Projeção Discreto

O método da projeção discreto baseado em decomposição LU é obtido através de fatoração em blocos do sistema linear resultante. Isto implica que a separação (ou *split*) entre velocidade e pressão é feita depois da discretização no espaço e no tempo das equações de governo:

$$M\left(\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{Re} K \mathbf{v}^{n+1} - G p^{n+1} = 0 \quad (\text{B.43})$$

$$D \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (\text{B.44})$$

$$M\left(\frac{c_i^{n+1} - c_d^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{ReSc} K c^{n+1} = 0. \quad (\text{B.45})$$

A Eq. (B.45) pode ser resolvida separadamente, no entanto, as Eqs. (B.43 e B.44) formam um sistema de equações que pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} B & -\Delta t G \\ D & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bc_1 \\ bc_2 \end{bmatrix} a, \quad (\text{B.46})$$

onde agora o sistema é escrito apenas para as incógnitas do problema, ou seja, $\mathbf{v}^{n+1} = [u_1^{n+1}, \dots, u_{Nu}^{n+1}, v_1^{n+1}, \dots, v_{Nv}^{n+1}, w_1^{n+1}, \dots, w_{Nw}^{n+1}]^T$, $p^{n+1} = [p_1^{n+1}, \dots, p_{Np}^{n+1}]^T$, sendo Nu , Nv , Nw e Np o número de incógnitas (nós livres) para velocidade na direção x , velocidade na direção y , velocidade na direção z e pressão respectivamente. A notação para as matrizes e vetores foi mantida a mesma por simplicidade. A matriz \mathbf{B} é dada por:

$$B = M + \frac{\Delta t}{Re} K \quad (\text{B.47})$$

e o lado direito representa as grandezas conhecidas no tempo n ,

$$r^n = -\Delta t v_d^n + M v^n, \quad (\text{B.48})$$

mais as condições de contorno que nada mais são do que as contribuições dos valores conhecidos de velocidade e pressão no lado direito do sistema.

O método da projeção baseado em fatoração LU visa decompor a matriz do sistema (Eq. B.46) através de uma fatoração por blocos. Em [37] são apresentadas várias formas de se fatorar esta matriz, cada forma dando origem a uma família de métodos diferentes. Utilizando uma fatoração canônica LU por blocos, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{D} & \Delta t \mathbf{D} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Delta t \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{bc}_1 \\ \mathbf{bc}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.49})$$

O sistema apresentado em (Eq. B.49), se resolvido, dá origem ao método de *Uzawa* [10]. Porém sua solução é cara computacionalmente devido à inversão da matriz \mathbf{B} a cada iteração. Para contornar esse problema foi utilizado um processo de aproximação conhecido por *lumping* [10]. Duas aproximações foram testadas, a primeira aproximou a matriz M por uma matriz de massa diagonal \mathbf{M}_L^{-1} enquanto que a segunda aproximou a matriz \mathbf{B} na matriz \mathbf{B}_L^{-1} , também diagonal. Na primeira aproximação, algumas oscilações foram encontradas nos campos de velocidade para número de *Reynolds* baixo. Já na segunda os resultados não apresentaram oscilações. É importante mencionar que, segundo [10], diferentes aproximações para as matrizes \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 podem ser feitas, porém, para satisfazer exatamente a equação de conservação da massa, é necessário que $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ e assim todo o erro cometido no desacoplamento aparece somente na equação de quantidade de movimento. Resolve-se o sistema desacoplado (Eq. B.49) da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{D} & \Delta t \mathbf{D} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{bc}_1 \\ \mathbf{bc}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.50})$$

$$\mathbf{B} \tilde{\mathbf{v}} = r^n + \mathbf{bc}_1 \quad (\text{B.51})$$

$$\Delta t \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} p^{n+1} = -\mathbf{D} \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{bc}_2 \quad (\text{B.52})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Delta t \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.53})$$

$$\quad (\text{B.54})$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}} + \Delta t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} p^{n+1} \quad (\text{B.55})$$

Este procedimento é semelhante ao procedimento apresentado no Método de Passo Fracionário, porém não há necessidade de imposição das condições de contorno para a velocidade tentativa e pressão.

B.6 Problemas

1. Demonstrar as seguintes identidades vetoriais, onde \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são vetores:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \\
 (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \\
 \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \\
 \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\
 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \\
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{B}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - \mathbf{A}[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \\
 &= \mathbf{C}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] - \mathbf{D}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \\
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})
 \end{aligned}$$

2. Demonstrar as seguintes identidades vetoriais, onde \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{v} são vetores, ϕ , f , g e ρ são funções escalares e S , um tensor de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{rot}(\mathbf{grad} \phi) &= 0 \\
 \mathbf{div}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) &= 0 \\
 \mathbf{div}(f \mathbf{grad} g - g \mathbf{grad} f) &= f \nabla^2 g - g \nabla^2 f \\
 \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) &= \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \\
 \mathbf{div}(\rho \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho + \rho \mathbf{div} \mathbf{v} \\
 \mathbf{div}[(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}] &= \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{div} \mathbf{v}) \\
 \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}^T &= \mathbf{div}[(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} - (\mathbf{div} \mathbf{v}) \mathbf{v}] + (\mathbf{div} \mathbf{v})^2 \\
 \mathbf{div}(\phi S \mathbf{v}) &= (\mathbf{grad} \phi) S \mathbf{v} + \phi (\mathbf{div} S^T) \mathbf{v} + \phi S : \mathbf{grad}^T \mathbf{v} \\
 \mathbf{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B} \\
 \mathbf{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \mathbf{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{div} \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{B} \\
 \mathbf{rot}(f \mathbf{A}) &= f \mathbf{rot} \mathbf{A} + \mathbf{grad} f \times \mathbf{A} \\
 \mathbf{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{rot} \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

3. Partindo da definição de rotacional de um vetor \mathbf{q} :

$$\mathbf{rot} \mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{q} \times \mathbf{n} dS,$$

onde S é a superfície que delimita o volume V e \mathbf{n} , o vetor unitário perpendicular ao elemento de área local de S , mostrar que:

$$\mathbf{rot} \mathbf{q} \times \mathbf{n} dA = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{l},$$

onde A é uma superfície plana cuja normal é \mathbf{n}_A e $d\mathbf{l}$, um elemento da curva de contorno que delimita A .

4. Mostrar que:

$$\oint_S \phi \mathbf{grad} \phi \times \mathbf{n} dA = 0.$$

Sugestão: escrever o termo $\phi \mathbf{grad} \phi$, sob a forma $\mathbf{grad} \phi^2/2$ e utilizar o resultado da proposição à Pág. 333 (Eq. B.22).

5. Mostrar que $\epsilon_{ikl}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}$.
6. Um tensor \mathcal{T} , de elementos $T_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_q \dots i_n}$, é anti-simétrico se $T_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_q \dots i_n} = -T_{i_1 i_2 \dots i_q \dots i_p \dots i_n}$. Mostrar que um tensor qualquer pode ser decomposto na soma de um simétrico com um anti-simétrico.
7. Mostrar que o produto $T_{ij}S_{ij} = 0$ se T_{ij} for o elemento geral de um tensor simétrico e S_{ij} , o de um tensor anti-simétrico.
8. O operador $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$ é simétrico ou anti-simétrico?
9. Seja o vetor $\mathbf{w} = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n})$, onde \mathbf{v} é um vetor arbitrário e \mathbf{n} , um vetor unitário. Em que direção \mathbf{w} aponta e qual é sua magnitude?
10. Seja os vetores $\mathbf{u} = (3; 2; -7)$, $\mathbf{v} = (4; 1; 2)$ e $\mathbf{w} = (6; 4; -5)$. Os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} são perpendiculares ente si? Qual é a magnitude de \mathbf{v} e \mathbf{w} ? Qual o ângulo entre esses dois vetores? Qual é a projeção de \mathbf{u} na direção de \mathbf{w} ?
11. Seja um ponto P , de coordenadas $(x_1 = 5; x_2 = 4; x_3 = 0)$. Quais são as coordenadas de P em um referencial girado em torno do eixo x_3 de 20° no sentido anti-horário (eixo x_1 girado na direção de x_2)?