

# Escoamentos Multifásicos

(FEN03711)

Prof. Gustavo Rabello Anjos

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
[gustavo.anjos@uerj.br](mailto:gustavo.anjos@uerj.br)

1o. período, 2015

# Tópicos da aula

- Conceitos Básicos de escoamentos dispersos;
- Abordagem computacional de escoamentos particulados;
- Mecanismos e a equação de BBO (com exemplos);
- Forças importantes;
- Solução da velocidade da partícula.

# Abordagens computacionais

## euler x lagrange

- euleriano-lagrangiano - DNS para fase contínua e cálculo da trajetória de cada partícula;
- euleriano-lagrangiano - LES/RANS para fase contínua e cálculo da trajetória de cada partícula;

## euler x euler

- euleriano-euleriano (dois fluidos) - as fases são descritas por duas equações distintas e acopladas por condições de contorno apropriadas;
- multfluidos euleriano-euleriano - modelos estatísticos são utilizados para o cálculo de muitas partículas.

# Equações Governantes

Conservação de quantidade  
de movimento

+

Conservação de massa

+

2a. lei de Newton para partículas

# Problema do canal

Conservação de quantidade de movimento + Fluido Newtoniano + Fluido incompressível → Navier-Stokes

Navier-Stokes + Conservação de massa + Média no tempo → RANS

RANS + viscosidade turbulenta + hipótese de Boussinesq + 2a. lei de Newton para partículas (BBO) → **modelo para canal 1D**

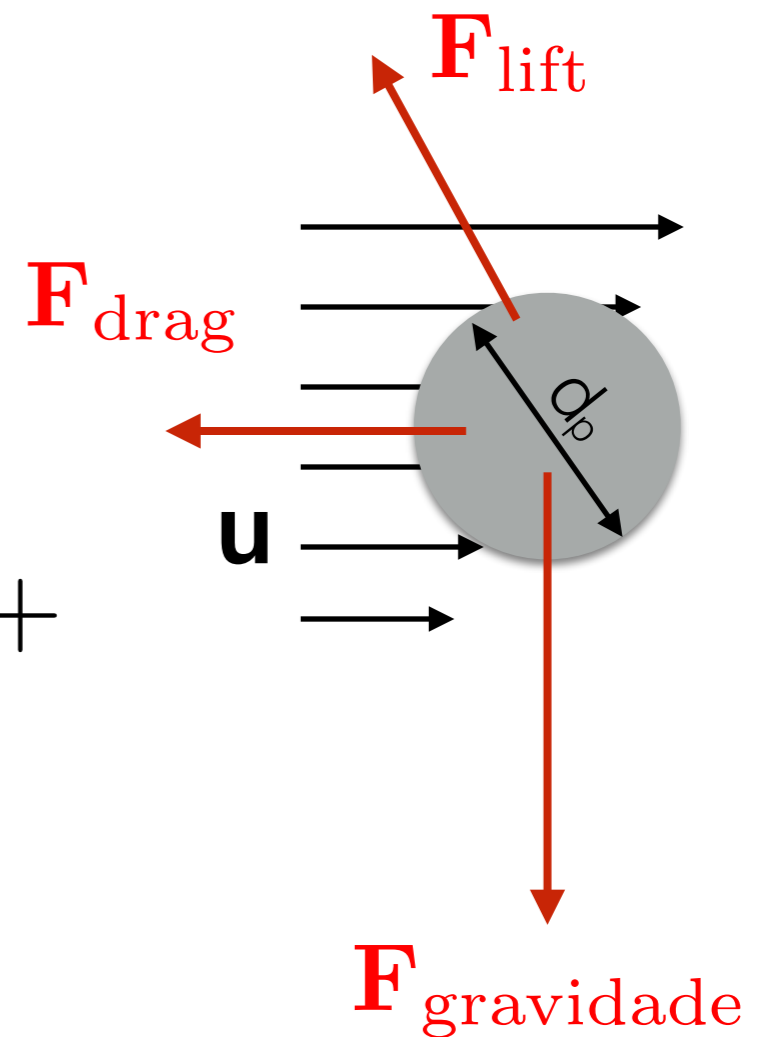
# Mecanismos

## 2a. lei de Newton

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{lift}} + \mathbf{F}_{\text{drag}} + \mathbf{F}_{\text{gravidade}} + \mathbf{F}_{\text{massa virtual}} + \mathbf{F}_{\text{historia}} + \text{etc.}$$

$$m = \rho_p dV = \rho_p \pi \frac{d_p^3}{6}$$



# Mecanismos

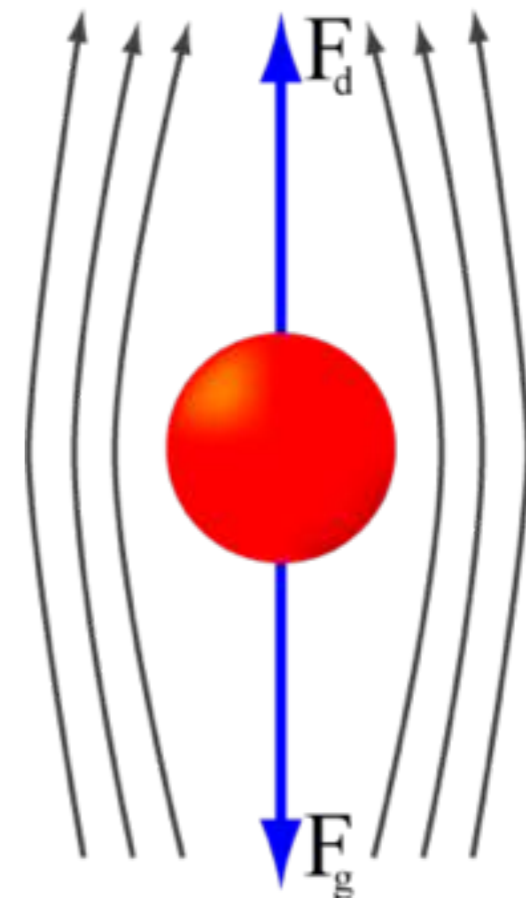
- distorção local do campo de velocidades: arrasto e 'lift'
  - arrasto (drag): diferença de velocidades
  - lift: assimetria
    - diferença de velocidade;
    - gradiente de velocidade;
    - diferença de rotação;
    - forma (partículas não esféricas).
- distorção local do campo de aceleração: massa virtual
- campo de tensões local: gravidade (buoyance)
- não-equilíbrio local: Basset

# Arrasto (drag)

Força que faz resistência ao movimento de uma partícula em um meio fluido, ou seja, aparece devido ao atrito entre a partícula e o fluido. Esta força é conseqüentemente paralela ao escoamento.

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} = -3\pi\mu d_p$$

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} = 3\pi\mu d_p \mathbf{u}$$





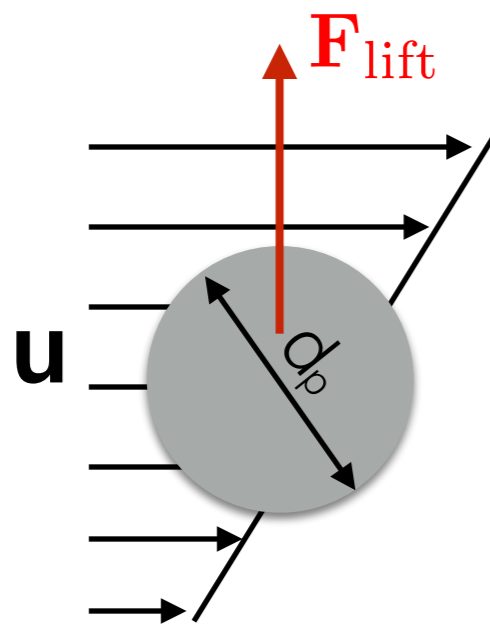
# Sustentação (lift)

Força perpendicular ao escoamento que surge devido à diferença de pressão sobre um objeto. Em partículas, esta força aparece devido à sua rotação.

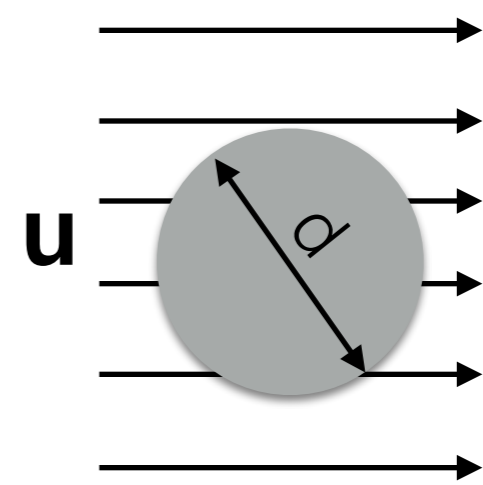
Por sua vez, a rotação das partículas é causada onde há gradiente de velocidade.

$$\mathbf{F}_{\text{lift}} = 1,61(\mu\rho_p)^{1/2}d_p^2|\mathbf{u} - \mathbf{v}|\frac{d\mathbf{u}}{dy}\left(\left|\frac{d\mathbf{u}}{dy}\right|\right)^{1/2}$$

$$\mathbf{F}_{\text{lift}} = 0$$



escoamento  
cisalhante

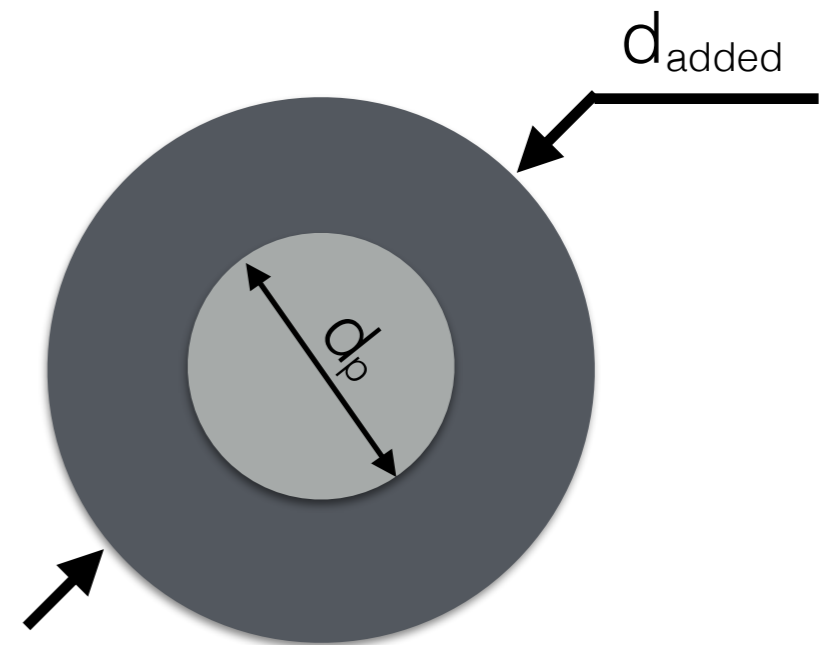


escoamento  
uniforme

# Massa virtual

Força causada pelo deslocamento de fluido ao redor de uma partícula quando em movimento. Para modelagem desta força, considera uma partícula com massa adicional, ou diâmetro aumentado.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{massa virtual}} &= \frac{1}{2} \frac{M}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\rho_p \pi \frac{d_p^3}{6}}{dt} \\ \mathbf{F}_{\text{massa virtual}} &= -\frac{1}{2} \frac{M}{dt} \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho_p \pi \frac{d_p^3}{6}}{dt} \mathbf{v} \end{aligned}$$



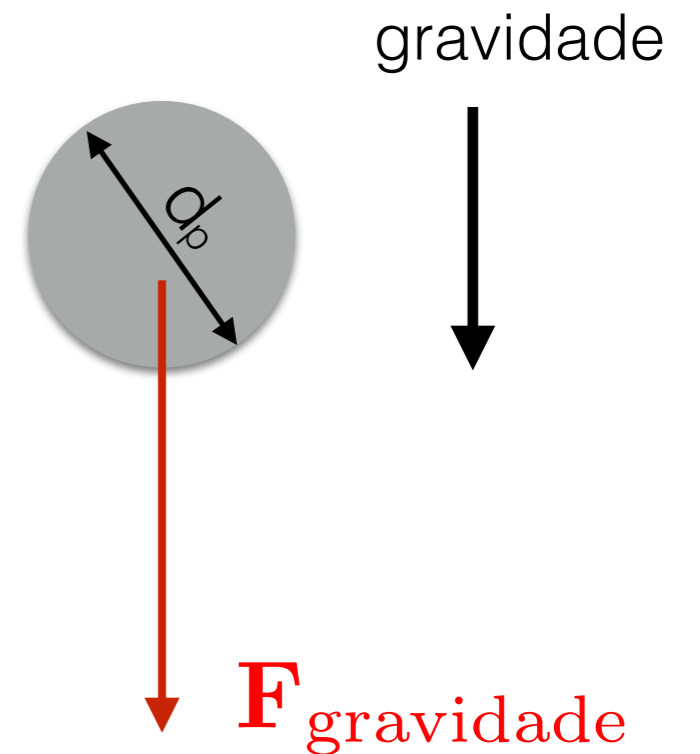
# Gravidade

$$\mathbf{F}_{\text{gravidade}} = m\mathbf{g}$$

$$m = \rho_p V$$

$$V = \pi \frac{d_p^3}{6}$$

$$\mathbf{F}_{\text{gravidade}} = \rho_p \pi \frac{d_p^3}{6} \mathbf{g}$$



# Outras forças/acoplamentos

- forças eletrostáticas (Coulomb): descreve a interação eletrostática entre partículas eletricamente carregadas;
- forças 'thermophoretics': aparecem devido a gradientes de temperatura na fase contínua;
- acoplamento da conservação de quantidade de movimento angular para partículas;
- acoplamento da conservação de energia em partículas;
- acoplamento de transferência de calor por convecção e radiação;
- etc.

# Equação BBO

Equação de Basset-Boussinesq-Oseen: descreve o movimento e as forças atuantes de uma partícula em escoamentos transientes e com baixo número de Reynolds

Zhou & Fan (1998)

$$\begin{aligned}
 \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & \underbrace{3\pi\mu d_p (\mathbf{u} - \mathbf{v})}_{\text{arrasto}} + \underbrace{\rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \mathbf{g}}_{\text{gravidade}} + \underbrace{\rho_f \frac{\pi d_p^3}{6} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})}_{\text{pressão e tensão de cisalhamento}} + \underbrace{\frac{\rho_f}{2} \frac{\pi d_p^3}{6} \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)}_{\text{massa virtual}} \\
 & + \underbrace{\frac{3}{2} \rho_f d_p^2 \sqrt{\nu\pi} \int_{-\infty}^t \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} - \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{(t - \tau)^{1/2}}}_{\text{história (basset)}} + F_{\text{lift}} + F_{\text{collisions}}
 \end{aligned}$$

# Equação BBO

Flows with Droplet and Particles, Crowe et al. (2012)

$$\begin{aligned}
 \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & \boxed{\rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \mathbf{g}} \quad \text{gravidade} \\
 & + \boxed{\mathbf{v}(\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau})} \quad \text{pressão e tensão de cisalhamento} \\
 & + \boxed{3\pi\mu d_p \left[ (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{d_p^2}{24} \nabla^2 \mathbf{u} \right]} \quad \text{arrasto} \\
 & + \boxed{\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \frac{d}{dt} \left[ (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{d_p^2}{24} \nabla^2 \mathbf{u} \right]} \quad \text{massa virtual} \\
 & + \boxed{\frac{3}{2} \pi \mu d_p^2 \int_0^t \left[ \frac{d/d\tau (\mathbf{u} - \mathbf{v} + d_p^2/24 \times \nabla^2 \mathbf{u})}{\pi \nu (t - \tau)^{1/2}} \right] d\tau} \quad \text{história (basset)}
 \end{aligned}$$

# Equação BBO no canal

Para o problema proposto neste curso, a equação de Basset-Boussinesq-Oseen deverá tomar a forma de:

$$\rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{\rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} \mathbf{g}}_{\text{gravidade}} + \underbrace{3\pi\mu d_p (\mathbf{u} - \mathbf{v})}_{\text{arrasto}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\rho_p \pi d_p^3}{6} \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{dt}}_{\text{massa virtual}} \quad \text{sustentação (lift)}$$
$$+ 1,61 (\mu \rho_p)^{1/2} d_p^2 |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \frac{d\mathbf{u}}{dy} \left( \left| \frac{d\mathbf{u}}{dy} \right| \right)^{1/2}$$

# Equação de BBO simplificada

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = B\mathbf{v} + C$$

Diagram illustrating the components of the simplified BBO equation:

- $B\mathbf{v}$  is composed of:  $F_{\text{arrasto}} + F_{\text{gravidade}} + F_{\text{lift}} + F_{\text{massa virtual}}$
- $C$  is composed of:  $F_{\text{arrasto}} + F_{\text{massa virtual}}$
- $m$  is the mass of the particle:  $\text{massa da partícula} = \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6}$

E como resolver esta equação diferencial ordinária de primeira ordem para encontrar a velocidade da partícula no tempo  $n+1$ ?

**Resposta:** Analiticamente ou numericamente.



# Equação de BBO simplificada

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = B\mathbf{v} + C$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{B}{m}\mathbf{v} + \frac{C}{m}$$

**analítico**

$$\mathbf{v}^{n+1} = \frac{\left( \frac{B}{m} \mathbf{v}^n + \frac{C}{m} \right) \exp\left( \frac{B\Delta t}{m} \right) - \frac{C}{m}}{B/m}$$

# Equação de BBO simplificada

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = B\mathbf{v} + C$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{B}{m}\mathbf{v} + \frac{C}{m}$$

**explícito**

**implícito**

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \frac{B}{m}\mathbf{v}^n + \frac{C}{m}$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \frac{B}{m}\mathbf{v}^{n+1} + \frac{C}{m}$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \left( \frac{B}{m}\mathbf{v}^n + \frac{C}{m} \right) \Delta t + \mathbf{v}^n$$

$$\left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{B}{m} \right) \mathbf{v}^{n+1} = \frac{C}{m} + \frac{\mathbf{v}^n}{\Delta t}$$