

## ESCOAMENTO EM CANAL - Modelos 1D

Preparado por: Leon Lima e Gustavo Anjos  
28 de Agosto de 2016

**Resumo.** Este texto apresenta os pontos principais da modelagem matemática de escoamento incompressível, desenvolvido, em regimes laminar e turbulento, permanente e transiente, em canal aberto. Conceitos básicos de turbulência em canais são apresentados. Além disso, a discretização das equações de escoamento em canal 1D utilizando os métodos de diferenças finitas e de elementos finitos é apresentada para os perfis laminar e turbulento. Ao longo do texto, o estudante poderá também se familiarizar com a modelagem de escoamentos particulados. Exercícios são propostos no final do texto.

### Conteúdo

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>2</b>
1.1	Abordagem Empírica ou Experimental . . . . .	2
1.2	Título de vapor . . . . .	3
1.3	Velocidades . . . . .	3
1.4	Fluxo de massa . . . . .	3
1.5	Fração de vazios . . . . .	3
1.6	Escoamentos verticais . . . . .	4
1.7	Escoamentos horizontais . . . . .	5
1.8	Mapa de padrões de escoamentos . . . . .	6
1.9	Perda de carga . . . . .	8
1.9.1	Método homogêneo . . . . .	8
1.9.2	Método de separação . . . . .	8
1.9.3	Perda de carga em conjunto de tubos . . . . .	8
1.9.4	Recomendações . . . . .	8
1.10	Mudança de fase . . . . .	8
1.10.1	Condensação . . . . .	8
1.10.2	Formas de vaporização . . . . .	8
1.10.3	Ebulição . . . . .	8
<b>2</b>	<b>PERFIL LAMINAR</b>	<b>8</b>
2.1	Regime laminar permanente . . . . .	8
2.2	Regime laminar transiente . . . . .	10
<b>3</b>	<b>PERFIL TURBULENTO</b>	<b>10</b>
3.1	Camada limite turbulenta . . . . .	12
3.2	Comprimento de mistura de Prandtl . . . . .	13
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS</b>	<b>14</b>
4.1	Laminar permanente . . . . .	14
4.2	Laminar transiente . . . . .	15
4.3	Condições de Contorno . . . . .	16
<b>5</b>	<b>MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>16</b>

5.1 Laminar permanente . . . . .	17
<b>6 PARTÍCULAS</b>	<b>19</b>
<b>7 TESTES</b>	<b>21</b>
<b>A COMO CALCULAR ERRO</b>	<b>21</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Escoamentos multifásicos são caracterizados quando há presença de mais de uma fase no escoamento, onde entende-se por fase a região do espaço delimitada por uma interface que a separa de outra fase. É importante notar que um escoamento multifásico pode conter o mesmo tipo de substância presente em fases distintas. Esse é o caso, por exemplo, de água escoando em um radiador (trocaador de calor) de automóvel. Nesse caso encontra-se no mesmo sistema água no estado líquido, antes de entrar em contato com o óleo aquecido do motor, e água em estado gasoso, depois de absorver calor do óleo e o líquido trocar de fase. Este escoamento multifásico é considerado de material único, porém de múltiplas fases. Na tabela 1 encontram-se exemplos de misturas multifásicas, como a chuva que se caracteriza pelo escoamento de gotas de água imersas em ar e também de escoamentos monofásicos com vários materiais, que é o caso do escoamento de ar composto de diversos gases em uma fase única homogênea.

material	fase única	fases diferentes
único	escoamento de água em dutos	líquido em ebulição
variado	mistura de gases do ar	chuva (escoamento de água e ar)

Tabela 1: Exemplos de escoamentos multifásicos encontrados na natureza com diversos materiais e fases.

### 1.1 Abordagem Empírica ou Experimental

Para iniciarmos a introdução às técnicas experimentais, passamos pela definição de importantes parâmetros utilizados na caracterização do escoamentos bifásicos. A seguir, serão identificados padrões encontrados frequentemente em escoamentos multifásicos em canais verticais e horizontais. é importante notar que a literatura disponível em escoamentos com mais de uma fase é extenso e não se limita aos exemplos introdutórios apresentados neste capítulo. Ao leitor que deseja aprofundar tais conceitos, sugerimos [4], [14] e [3].

## 1.2 Título de vapor

O título de vapor ( $x$ ) é definido pela razão da vazão mássica de vapor ( $\dot{M}_G$ ) dividida pela vazão mássica total ( $\dot{M}_G + \dot{M}_L$ ):

$$x = \frac{\dot{M}_G}{\dot{M}_G + \dot{M}_L} \quad (1)$$

Quando o escoamento é adiabático, ou seja não há transferência de calor, se torna necessário a medida de vazão mássica para cada fase, com isso o título de vapor é determinada para todo o tubo. Se o tubo é aquecido e fluxos de massa são notados no sistema, o título de vapor aumentará na direção do escoamento. No entanto, para o caso de resfriamento do tubo e, conseqüentemente, a condensação do vapor, o título de vapor diminuirá na direção do escoamento.

## 1.3 Velocidades

Em escoamentos multifásicos existem um grande número de velocidades que podem ser definidas experimentalmente. Ainda, como os fluidos estão em fases distintas, diferentes velocidades podem ser encontradas, sugerindo também o uso de velocidade relativa como base para caracterização da velocidade do escoamento. A seguir são definidas algumas importantes velocidades encontradas na literatura.

- Velocidade média verdadeira: é a velocidade em que cada fase se movimenta no escoamento.
- Velocidade superficial: também conhecida como fluxo volumétrico, é definida como a razão do fluxo de velocidade da fase considerada pela área transversal total do escoamento multifásico.
- Velocidade de deriva: razão da velocidade verdadeira média pela velocidade superficial total.

## 1.4 Fluxo de massa

O fluxo de massa ( $G$ ) é definido como a vazão mássica total ( $\dot{M}$ ) dividida pela área transversal do escoamento:

$$G = \frac{\dot{M}}{A} \quad (2)$$

onde a expressão acima representa a relação entre a velocidade média do escoamento multiplicada pela densidade média. A unidade usual de fluxo de massa é  $[kg/m^2s]$ .

## 1.5 Fração de vazios

A fração de vazios  $\epsilon$  é um dos parâmetros mais importantes para caracterização de escoamentos multifásicos. Este também é de grande importância para a determinação de outros parâmetros, tais como viscosidade e densidade em escoamentos multifásicos, obtenção de velocidade média relativa e, também, como ferramenta fundamental em modelos de previsão de transição de padrões de escoamentos.

Na literatura existem várias definições para especificação de fração de volume (veja [13]). Aqui serão apresentadas as principais definições de fração de vazios: local, cordal, transversal e volumétrica.

A fração de vazios local  $\epsilon_{local}$  é tipicamente medida em um ponto ou pequeno volume quando feita experimentalmente. é definida com  $\epsilon_{local} = 0$  quando líquido está presente ou  $\epsilon_{local} = 1$  quando vapor está presente.

Tipicamente é realizada uma média temporal local para determinação da fração de vapor, sendo definida pela seguinte expressão:

$$\epsilon_{local}(r, t) = \frac{1}{t} \int_t P_k(r, t) dt \quad (3)$$

onde  $P_k(r, t)$  é uma função indicadora da presença de vapor no ponto em função do tempo  $t$ .

A fração de vazios cordal  $\epsilon_{local}$  é tipicamente medida através de um feixe radioativo brilhante que atravessa o tubo onde o escoamento multifásico está localizado. Através da absorção de luz deste feixe no outro lado do tubo, é possível medir o comprimento da fase gasosa. A vazão de vazios cordal é então determinada por:

$$\epsilon_{cordal} = \frac{L_G}{L_G + L_L} \quad (4)$$

onde  $L_G$  é o comprimento de linha na fase gasosa e  $L_L$  na fase líquida.

A fração de vazios transversal  $\epsilon_{trans}$ , é medida a partir de meios óticos ou através de medidas indiretas, tal como a capacitância elétrica de uma fase líquida condutora. Esta fração é definida como:

$$\epsilon_{trans} = \frac{A_G}{A_G + A_L} \quad (5)$$

onde  $A_G$  é a área ocupada da fase gasosa e  $L_L$  da fase líquida.

A fração de vazios volumétrica  $\epsilon_{vol}$  é medida geralmente através de mecanismos de armadilha para os fluidos, onde por um instante breve a amostra fica armazenada, possibilitando a medida da quantidade de gás e líquido diretamente. Esta fração é então definida como:

$$\epsilon_{vol} = \frac{V_G}{V_G + V_L} \quad (6)$$

onde  $V_G$  é o volume ocupado da fase gasosa e  $L_L$  da fase líquida.

## 1.6 Escoamentos verticais

Os padrões de escoamentos para cima em tubos verticais é apresentado esquematicamente na Fig. (1). As diferenças básicas observadas experimentalmente são descritas a seguir. é importante notar que a utilização de cada padrão de escoamento depende da sua aplicação.

- Bolhas dispersas: no escoamento em bolhas, o gás ou a fase vapor está distribuída na fase contínua líquida como um aglomerado de bolhas. Em uma situação extrema, estas bolhas podem apresentar formato esférico e de pequeno diâmetro ou apresentar formato de corpo alongado com a uma das extremidades arredondadas. Neste último estado, mesmo não apresentando tamanhos comparáveis ao diâmetro do tubo, o padrão das bolhas pode trazer alguma semelhança ao escoamento em golfadas.
- Golfadas: neste tipo de escoamento, as bolhas apresentam aproximadamente o mesmo diâmetro do tubo, com isso os efeitos de parede são mais evidentes. O nariz da bolha tem um formato característico arredondado devido à pressão e ao escoamento, enquanto que as laterais são separadas por um filme líquido que vai suavemente diminuindo até chegar à parte de trás da bolha. O termo golfadas representa o líquido que separa sucessivas bolhas de gás ou vapor. Dependendo do escoamento, pequenas bolhas podem ou não estar presentes entre as bolhas principais.
- Batido: a interface de largas bolhas de gás ou vapor se quebra, formando o escoamento do tipo golfadas

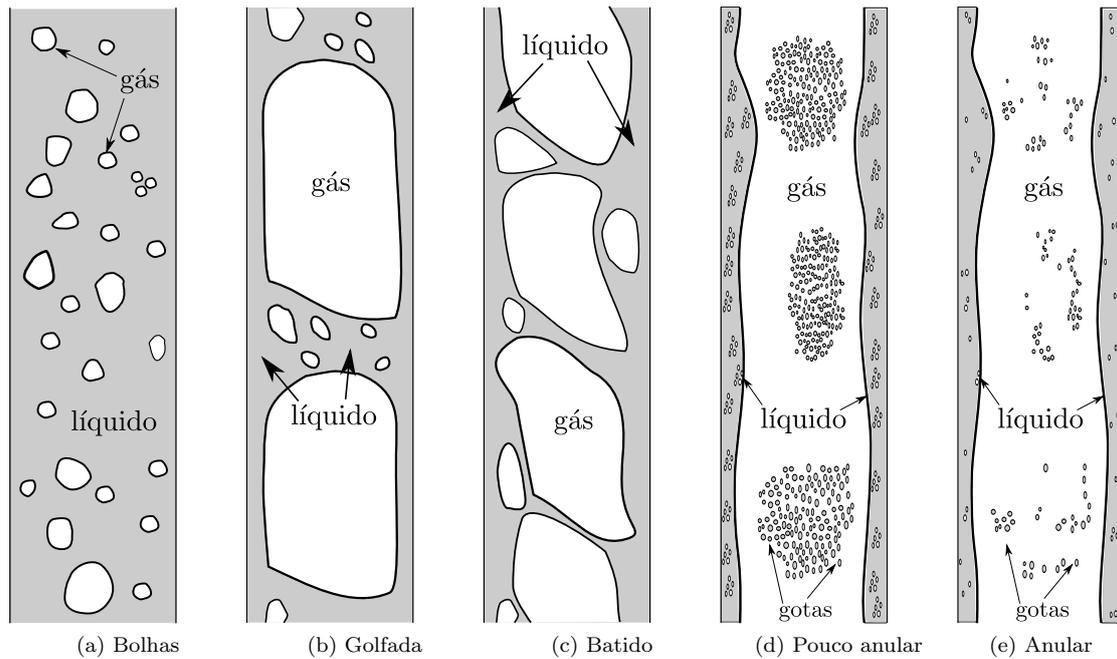


Figura 1: Escoamentos bifásicos em tubos verticais. Em todos os casos o escoamento se faz de baixo para a cima. Os efeitos gravitacionais são uniformes ao longo do eixo horizontal, fazendo com que o escoamento apresente alguma estrutura simétrica.

em uma distribuição caótica. Nele, a fase líquida é empurrada em direção às paredes do canal. Este escoamento também é conhecido como semi-anular ou golfada-anular, devido ao caráter transitório deste padrão.

- Pouco anular: o filme líquido apresenta grande espessura nas paredes do tubo com uma considerável quantidade de líquido arrastada para dentro do núcleo de gás ou vapor. Este tipo de padrão de escoamento foi primeiramente identificado pelo trabalho de [8]. Em um padrão geral, muitas bolhas são encontradas no filme líquido próximo às paredes do tubo, enquanto que grandes gotas são arrastadas dentro do núcleo de gás ou vapor. Este padrão de escoamento é encontrado em grandes vazões mássicas e, devido á grande quantidade de bolhas no filme líquido, este escoamento pode ser confundido com o escoamento em bolhas.
- anular: um filme líquido é formado próximo às paredes do tubo devido ao aparecimento de um núcleo contínuo de gás ou vapor no meio do tubo. O aparecimento de ondas pode ser notado na superfície do filme. Devido a sucessiva quebra destas ondas, pode haver a formação de gotas no núcleo de gás ou vapor. Diferentemente do escoamento do tipo pouco anular, as gotas estão separadas ao invés de aglomeradas.

## 1.7 Escoamentos horizontais

Os padrões de escoamento comumente encontrados em tubulações horizontais e inclinados são complexos devido à sua natureza não simétrica causada pelo influência do campo gravitacional. Entretanto são bem considerados até hoje os padrões multifásicos sugeridos por [1] e apresentados de forma esquemática na Fig. (2).

- Bolhas dispersas: este escoamento é similar ao apresentado anteriormente para escoamento vertical, com a diferença que as bolhas de gás ou vapor tendem a se movimentar na metade superior do tubo. Fato justificado pela menor densidade da bolha comparada ao líquido. Em uma velocidade moderada de ambas as fases presente no escoamento, a distribuição de bolhas é uniforme ao longo do tubo, enquanto que para velocidades mais elevadas o padrão de escoamento se assemelha ao pouco anular.

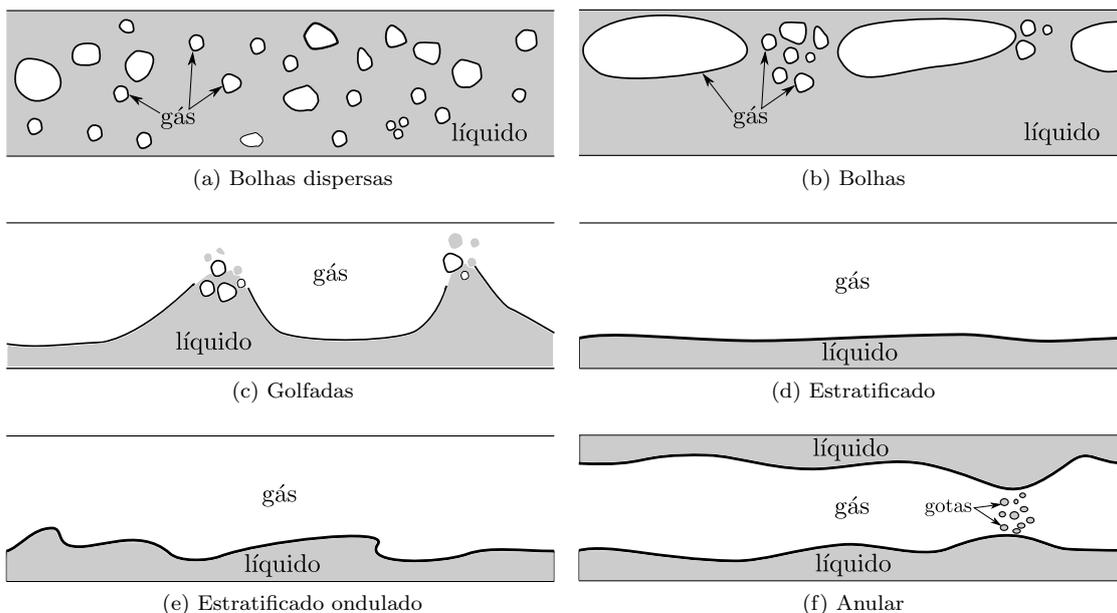


Figura 2: escoamentos bifásicos em tubos horizontais. Em todos os casos o escoamento se faz da esquerda para a direita. Dependendo da velocidade de entrada das fases, um padrão pode ser identificado. Como pode ser verificado pela posição das bolhas, a gravidade exerce uma influência imediata nas fases, uma vez que o fluido menos denso tende a se movimentar na parte de cima do tubo.

- Bolhas: escoamento similar ao do tipo golfadas em tubos verticais. Como no caso de bolhas dispersas, a bolhas de gás ou vapor tendem a atravessar o tubo na metade superior, devido ao campo gravitacional.
- Estratificado: escoamento separado por uma interface suave, onde geralmente é encontrado em baixas velocidades das fases líquida e gasosa.
- Estratificado ondulado: as ondas são formadas quando a velocidade na fase gasosa é aumentada. Estas ondas se movimentam na direção do escoamento.
- Golfada: com o aumento da velocidade da fase de vapor, a amplitude das ondas também aumenta, se aproximando da parede do tubo. A parte superior do tubo atrás da onda é molhada por um filme líquido que é drenado para o meio da fase líquida.
- Anular: a vazão da fase gasosa é tão alta que é capaz de sustentar a fase líquida próxima à parede do tubo, originando um núcleo de gás ou vapor. Em sua seção transversal, o líquido pode não ser contínuo ao redor de toda a circunferência, porém será mais espesso na base do tubo.

## 1.8 Mapa de padrões de escoamentos

Os mapas de padrões de escoamento são utilizados para a identificação do tipo de escoamento (golfadas, anular, estratificado etc.) através de parâmetros conhecidos como vazão mássica, fração de vazios, qualidade de vapor etc. Estes mapas existem para diferentes tipos de fluidos, dimensão de tubos, graus de mistura e muitos outros. Basicamente, eles podem ser divididos em duas classes: adiabáticos e diabáticos. O primeiro é usualmente utilizado para escoamentos do tipo ar/água, enquanto o segundo pode ser encontrado em refrigerantes em evaporação.

Os mapas de padrões são representados como áreas em gráficos, em função das velocidades superficiais ou qualquer outro parâmetro geral que contenha tal definição. É importante notar que o padrão de escoamento é também influenciado por outros tipos de parâmetros, porém sua descrição é feita através de gráficos bi-dimensionais. Na literatura, muitos mapas podem ser encontrados para diferentes fluidos e em diferentes

condições. O leitor interessado poderá consultar algumas referências clássicas como ([4], [14] e [13]).

A Fig. (3a) representa um mapa de padrões de escoamento para ar/água, em condições de pressão atmosférica, para canais verticais baseado em ([9]). Neste mapa pode-se observar que cada padrão de escoamento ocupa uma área no gráfico e as linhas tracejadas delimitam a transição. Como pode-se observar também, estas mesmas linhas não ocupam todo o limite do gráfico, o que sugere a falta de dados experimentais para descrever as transições em toda a escala. É importante notar que estes mapas devem ser observados não mais do que um guia grosseiro de padrões de escoamentos, pois os fluxos de quantidade de movimento por si só não são capazes de representar com exatidão a influência das propriedades físicas do fluido nem o diâmetro do tubo.

A Fig. (3b) descreve um outro mapa de padrões, porém para escoamento horizontal baseado em ([2]). Este mapa é largamente utilizado na indústria petroquímica. No mapa pode-se identificar os padrões de escoamento em diferentes velocidades mássicas superficiais de líquido  $G_L$  e de gás  $G_G$ .

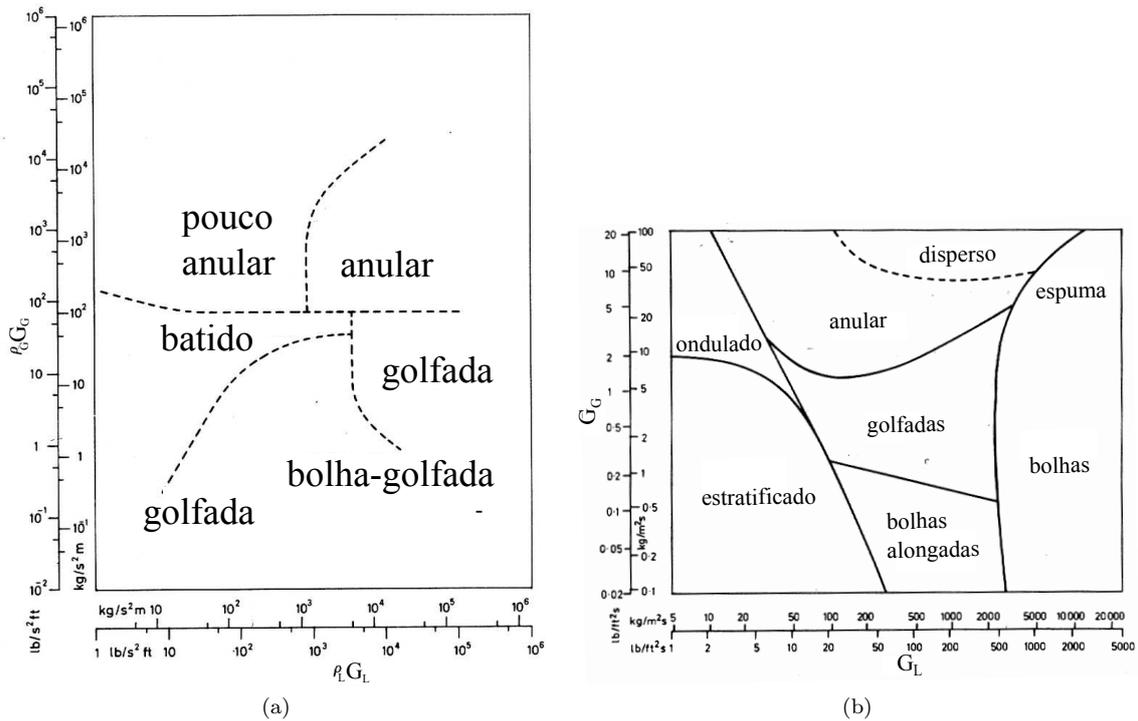


Figura 3: Mapas de padrões de escoamento bifásico representado por fluxo de massa  $G$  de líquido  $G_L$  e de gás  $G_G$ . As linhas contínuas e tracejadas representam a transição dos padrões de escoamento. (a) Escoamento vertical para ar/água baseado em ([9]). (b) Escoamento horizontal para ar/água baseado em ([2]).

## 1.9 Perda de carga

1.9.1 Método homogêneo

1.9.2 Método de separação

1.9.3 Perda de carga em conjunto de tubos

1.9.4 Recomendações

## 1.10 Mudança de fase

1.10.1 Condensação

1.10.2 Formas de vaporização

1.10.3 Ebulição

## 2 PERFIL LAMINAR

### 2.1 Regime laminar permanente

Considere as componentes  $x$  e  $y$  das equações de Navier Stokes para escoamento incompressível (com viscosidade constante<sup>1</sup> e sem termo das forças de corpo):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (7a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (7b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

Para o regime permanente do escoamento,  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ .

Suponha também que o escoamento seja desenvolvido, isto é:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

o que, devido a conservação de massa Eq. (8), implica em:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

Esse resultado significa que  $v = \text{constante}$  ao longo de qualquer seção do canal. Mais do que isso: por causa das condições de contorno de não deslizamento,  $v = 0$ , em todo o domínio do escoamento.

<sup>1</sup>Para um escoamento isotérmico, a hipótese de viscosidade constante é muito realista, uma vez que, embora ela dependa também da pressão do fluido (além da temperatura), as variações com a pressão são extremamente baixas.

Temos portanto:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (11a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (11b)$$

A condição de que a derivada parcial da pressão em relação a  $y$  seja nula significa que  $p = p(x)$ , ou seja, o campo de pressão não depende da coordenada  $y$ . Este resultado significa que o escoamento incompressível, desenvolvido e estacionário em um canal cujos fluxos na direção  $z$  são irrelevantes é modelado por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (12)$$

Uma vez que a pressão depende apenas de  $x$  e a velocidade  $u$  depende apenas de  $y$ , podemos concluir que a pressão depende linearmente de  $x$ , de maneira que  $\partial p / \partial x$  é constante. Dado um gradiente de pressão, a equação 12 se torna uma EDO homogênea de segunda ordem, cuja solução é o perfil laminar do escoamento com as características citadas, expresso por:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (13)$$

A Eq.(13) fornece a solução geral do problema representado pela Eq. (12). As condições de contorno definem a natureza do problema. Tratamos aqui o caso particular de não-escorregamento de partículas em contato com as paredes inferior  $y = 0$  e superior  $y = L$ . Com isso, as condições de contorno para velocidade se escrevem:

$$u(y = 0) = u(0) = 0 \quad (14)$$

$$u(y = L) = u(L) = 0 \quad (15)$$

Os coeficientes  $C_1$  e  $C_2$  da Eq. (13) podem ser encontrados através da imposição das condições de contorno, definindo então a solução particular do problema:

$$C_1 = \frac{u(L) - u(0)}{L} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} L \quad (16)$$

$$C_2 = u(0) \quad (17)$$

onde  $L$  é a largura do canal. Se  $u(0) = u(L) = 0$ , obtemos:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - Ly) \quad (18)$$

Para o problema do canal, a velocidade  $U$  é máxima no centro  $y = L/2$ . Considere  $u(y = L/2) = U$ . Para o perfil dado pela equação 18, temos portanto que:

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( -\frac{L^2}{4} \right) \quad (19)$$

o que resulta em:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8 \frac{\mu U}{L^2} \quad (20)$$

Definindo o número de Reynolds como  $Re = UL\rho/\mu$ , obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8 \frac{\mu^2 Re}{\rho L^3} \quad (21)$$

## 2.2 Regime laminar transiente

O regime transiente do mesmo escoamento pode ser representado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (22)$$

Note que agora a equação depende da densidade  $\rho$  do fluido. De fato, para o regime transiente, a variação do perfil de velocidade com o tempo deve ser influenciada pela inércia do fluido, convergindo, no entanto, para um valor comum para qualquer valor de  $\rho$ . Note ainda que a pressão agora é também função do tempo, isto é,  $p = p(x, t)$  e seu gradiente não pode mais ser calculado pela expressão 20.

## 3 PERFIL TURBULENTO

Para números de Reynolds acima de um certo limite<sup>2</sup>, eventuais perturbações introduzidas ao escoamento podem gerar oscilações cujas amplitudes cresçam monotonicamente, tornando-o instável hidrodinamicamente e convertendo o regime laminar em turbulento. Escoamentos turbulentos são caracterizados por:

- alto grau de mistura
- riqueza de escalas
- imprevisibilidade

Osborne Reynolds introduziu a abordagem estatística ao estudo de escoamentos turbulentos em 1895 [12], segundo a qual o escoamento médio é resolvido. Para escoamentos quase estacionários, médias temporais podem ser usadas [7]. Matematicamente, o conceito introduzido por Reynolds consistia na média das equações de Navier-Stokes, cujo resultado são as equações RANS – *Reynolds Averaged Navier-Stokes*. Para escoamentos incompressíveis, elas são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \cdot \overline{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}} \quad (23)$$

<sup>2</sup>Reynolds observou em experimento os regimes pelos quais um escoamento pode passar e quais os parâmetros influenciavam na transição. Suas conclusões em cima desse trabalho foram publicadas em 1883[11, 6]

Expandindo em coordenadas cartesianas temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{u\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u\tilde{w}} \right) \quad (24a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{v\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v\tilde{w}} \right) \quad (24b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{w\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{w\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w\tilde{w}} \right) \quad (24c)$$

É importante notar que o campo de velocidade  $\mathbf{v}$  e suas componentes, bem como o campo de pressão  $p$ , expressam aqui os respectivos valores médios, enquanto que o campo  $\tilde{\mathbf{v}}$  e suas componentes representam as flutuações em torno dos valores médios, conforme a decomposição de Reynolds.

A dissipação introduzida pelos termos não-lineares de flutuação pode ser interpretada como um campo de tensão adicional atuando no escoamento, representado pelo tensor de tensões turbulentas dado por  $\tau_t = -\rho \overline{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}$ , cujo divergente é

$$\nabla \cdot \tau_t = -\rho \nabla \cdot \overline{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}} \quad (25)$$

A equação 23 pode portanto ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v} + \tau_t) \quad (26)$$

Esta formulação introduz novas variáveis ao modelo, indeterminando o sistema de equações. A estratégia clássica de fechamento do sistema é a aplicação da hipótese de Boussinesq, proposta em 1877[7]<sup>3</sup>, segundo a qual os processos de difusão da quantidade de movimento molecular e turbulento são análogos. Matematicamente, isso equivale a

$$\tau_t = \mu_t \nabla \mathbf{v} \quad (27)$$

onde  $\mu_t$  é dita viscosidade turbulenta, ou viscosidade de Boussinesq. É mais conveniente agora nos referirmos à viscosidade molecular  $\mu_m$ . No caso da viscosidade cinética temos portanto  $\nu_t$  e  $\nu_m$ . Para a maioria dos números de Reynolds,  $\nu_t$  é algumas ordens de grandeza superior a  $\nu_m$ , ou seja, as dissipações turbulentas são muito maiores do que as dissipações viscosas. Introduzindo o conceito de viscosidade turbulenta na equação 26, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [(\nu_m + \nu_t) \nabla \mathbf{v}] \quad (28)$$

A viscosidade adicional  $\mu_t$  pode ser interpretada como um acréscimo dos efeitos de dissipação ao escoamento, e deve estar associada às características do escoamento.

Para o escoamento desenvolvido no canal, a equação 28 se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu_m + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (29)$$

<sup>3</sup>O artigo de Reynolds propondo a decomposição dos campos em parcelas média e flutuante e dando origem ao hoje chamado tensor de Reynolds foi publicado somente em 1895. O que havia como base de conhecimento para Boussinesq fazer essa proposta em 1877?

### 3.1 Camada limite turbulenta

A região do escoamento próxima à parede passa por transições importantes até chegar ao escoamento principal<sup>4</sup>. Essa região é a camada limite do escoamento. É bem aceito que a camada limite possui duas regiões distintas: uma adjacente à parede, na qual os efeitos viscosos predominam – subcamada viscosa – e uma seguinte na qual os efeitos turbulentos são mais importantes – subcamada turbulenta. Cada uma delas possui um perfil de velocidade diferente. Essa composição é conhecida como a estrutura assintótica da camada limite turbulenta.

Na subcamada viscosa, a condição do escoamento pode ser descrita por

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (30)$$

Após integração, chegamos a

$$u = \frac{C y}{\mu} \quad (31)$$

Tendo em vista que a tensão cisalhante  $\tau_w$  na parede é

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (32)$$

temos que

$$u = \frac{\tau_w y}{\mu} \quad (33)$$

Finalmente, introduzindo uma velocidade  $u_\tau$ , denominada velocidade de atrito, definida por

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (34)$$

podemos adimensionalizar a equação 33 definindo

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (35a)$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad (35b)$$

De tal forma que, para a subcamada viscosa, temos

$$u^+ = y^+ \quad (36)$$

Para a subcamada turbulenta, é necessária uma avaliação das ordens de grandeza dos termos importantes, utilizando o conceito de comprimento de mistura. Freire et al. [7] descrevem o desenvolvimento da expressão para a região turbulenta da camada limite. Aqui, vamos nos limitar a dizer que o perfil de velocidade na subcamada turbulenta é expresso por

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (37)$$

onde  $\kappa$  é a constante de Von Kármán, sendo normalmente  $\kappa = 0,41$ , e  $B = 5$  é um valor constante bem aceito para escoamentos em parede, baseado em resultados experimentais. A figura 3.13 de Freire et al. [7] apresenta

<sup>4</sup>A expressão em inglês para o escoamento principal seria “bulk flow”.

um conjunto de perfis para a camada limite turbulenta obtidos de experimentos diversos.

### 3.2 Comprimento de mistura de Prandtl

A viscosidade turbulenta  $\nu_t$  pode ser determinada através de modelo algébrico ou de modelo a uma equação diferencial ou de modelo a duas equações diferenciais (neste se enquadram os modelos  $\kappa$ - $\epsilon$  e  $\kappa$ - $\omega$ ).

O modelo algébrico é baseado no conceito de comprimento de mistura, concebido por Ludwig Prandtl (ver Freire et al. [7], capítulo 3), que define o quanto a partícula deve se afastar para perder sua identidade e misturar-se com as outras. A viscosidade turbulenta é então definida por:

$$\nu_t = l_c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (38)$$

onde  $l_c$  é o comprimento de mistura. Para escoamentos próximos a paredes sólidas (caso do escoamento no canal),

$$l_c = \kappa y, \text{ para } y \leq \delta \quad (39a)$$

$$l_c = \kappa \delta, \text{ para } y > \delta \quad (39b)$$

onde  $\kappa$  é a constante de Von Kármán, e  $\delta$  é a espessura da camada limite.

Com essa definição, a variação do comprimento de mistura passa por uma descontinuidade da parede para o interior da camada limite. O comprimento de mistura pode ser calculado ainda com a aplicação de uma função de amortecimento. Normalmente é usada a função de amortecimento de Van Driest. Neste caso,

$$l_c = D\kappa y, \text{ para } y \leq \delta \quad (40)$$

com

$$D = 1 - \exp\left(-y \frac{u_\tau}{A\nu}\right) \quad (41)$$

onde  $A = 26$ .

Cabe ressaltar que a modelagem do escoamento através da introdução da viscosidade turbulenta é uma das formas de solução do Problema de Fechamento dos modelos RANS e é dito modelo de turbulência de primeira ordem. Existem modelos nos quais as componentes do tensor de Reynolds são decompostas, dando a origem a termos com produtos de três componentes de velocidade, classificados como modelos de turbulência de segunda ordem. Um outro ponto é que, no caso particular do escoamento no canal, considerando que ele possua largura  $L$ , o comprimento de mistura é dado por

$$l_c = \kappa y, \text{ para } y \leq \delta \quad (42a)$$

$$l_c = \kappa \delta, \text{ para } \delta < y < L - \delta \quad (42b)$$

$$l_c = \kappa(L - y), \text{ para } y \geq (L - \delta) \quad (42c)$$

## 4 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

### 4.1 Laminar permanente

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (43)$$

A discretização em diferenças finitas unidimensional é feita para um ponto genérico de malha  $i$  e distância entre nós uniforme igual a  $\Delta y$ , a discretização da equação 12 em diferenças finitas centradas é expressa por:

$$\frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) - \nu_{i-1/2}(u_i - u_{i-1})}{\Delta y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (44)$$

Note que a viscosidade cinemática  $\nu = \mu/\rho$  é discretizada no ponto médio dos segmentos da malha em diferenças finitas  $i + 1/2$  e  $i - 1/2$ , tomando-se então  $\nu_{i+1/2} = (\nu_i + \nu_{i+1})/2$  e  $\nu_{i-1/2} = (\nu_{i-1} + \nu_i)/2$ .

O sistema de equações resultante é linear, e pode ser representado matricialmente por

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (45)$$

onde, considerando que a malha possui  $m$  pontos nodais,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,m} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (48)$$

Para uma linha  $i$  e coluna  $j$  genéricas, a montagem (*assembling*) da matriz do termo difusivo  $\mathbf{A}$  da equação em

regime permanente é feita organizando-se os coeficientes de  $u_{i-1}$ ,  $u_i$  e  $u_{i+1}$  em colunas dentro de um laço (*loop*) do tipo

- coluna  $j - 1$ :

$$A_{i,j-1} = \frac{\nu_{i-1/2}}{\Delta y^2} \quad (49)$$

- coluna  $j$ :

$$A_{i,j} = \frac{-\nu_{i+1/2} - \nu_{i-1/2}}{\Delta y^2} \quad (50)$$

- coluna  $j + 1$ :

$$A_{i,j+1} = \frac{\nu_{i+1/2}}{\Delta y^2} \quad (51)$$

Para a montagem do vetor do lado direito  $\mathbf{b}$ :

- linha  $i$ :

$$b_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (52)$$

A solução do sistema linear 45 fornece o perfil laminar permanente de velocidade no canal.

## 4.2 Laminar transiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (53)$$

A discretização em diferenças finitas unidimensional ocorre da mesma forma que no caso de escoamento laminar estacionário, porém com a inclusão da derivada transiente ( $\partial/\partial t$ ) na equação. Com isso, para um ponto genérico de malha  $i$ , para passo de tempo  $\Delta t$  e distância entre nós uniforme igual a  $\Delta y$ , a discretização da equação 22 em diferenças finitas centradas é expressa por:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha \frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \nu_{i-1/2}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})}{\Delta y^2} + \\ & + (1 - \alpha) \frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - \nu_{i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (54)$$

onde  $\alpha$  representa uma variável limitada por  $0 \leq \alpha \leq 1$  que ajusta o esquema discreto no tempo em explícito  $\alpha = 0$ , implícito  $\alpha = 1$  e de segunda ordem do tipo Crank-Nicholson para  $\alpha = 1/2$ . A viscosidade cinemática  $\nu = \mu/\rho$  é discretizada no ponto médio dos segmentos da malha em diferenças finitas  $i+1/2$  e  $i-1/2$ , tomando-se então  $\nu_{i+1/2} = (\nu_i + \nu_{i+1})/2$  e  $\nu_{i-1/2} = (\nu_{i-1} + \nu_i)/2$ .

Para o *assembling* da matriz do termo difusivo  $\mathbf{A}$  da equação em regime transiente, propõe-se um esquema dentro de um *loop* do tipo (para linha  $i$ ):

- coluna  $j - 1$ :

$$A_{i,j-1} = -\alpha \frac{\nu_{i-1/2}}{\Delta y^2} \quad (55)$$

- coluna  $j$ :

$$A_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} + \alpha \frac{\nu_{i+1/2}}{\Delta y^2} + \alpha \frac{\nu_{i-1/2}}{\Delta y^2} \quad (56)$$

- coluna  $j + 1$ :

$$A_{i,j+1} = -\alpha \frac{\nu_{i+1/2}}{\Delta y^2} \quad (57)$$

Para a montagem do vetor do lado direito:

- linha  $i$ :

$$b_i = \frac{u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + (1 - \alpha) \frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - \nu_{i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta y^2} \quad (58)$$

A adoção do esquema completamente explícito ( $\alpha = 0$ ) impõe um limite quanto ao valor do incremento de tempo  $\Delta t$ , acima do qual a formulação se torna numericamente instável. Este limite pode ser determinado a partir do método de análise de Von Neumann. O resultado da análise considerando viscosidade constante exige que

$$\Delta t \leq 2 \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\nu}{\Delta y^2} \right)^{-1} \quad (59)$$

A solução do sistema linear resultante fornece o campo laminar de velocidade para o passo de tempo  $n$ .

### 4.3 Condições de Contorno

Para que o problema tenha solução única, condições de contorno devem ser impostas. No escoamento em canal, é razoável supor condição de não deslizamento nas paredes, i.e.,

$$u(y = 0) = 0 \quad (60a)$$

$$u(y = L) = 0 \quad (60b)$$

No contexto do problema discreto, com malha deslocada, esta condição exige que

$$u_1 + u_2 = 0 \quad (61a)$$

$$u_m + u_{m-1} = 0 \quad (61b)$$

De tal forma que

$$A_{1,1} = 1 \quad (62a)$$

$$A_{1,2} = 1 \quad (62b)$$

$$A_{m,m} = 1 \quad (62c)$$

$$A_{m,m-1} = 1 \quad (62d)$$

$$b_1 = 0 \quad (62e)$$

$$b_m = 0 \quad (62f)$$

## 5 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O objetivo desta seção é resolver o problema anteriormente apresentado utilizando o método de elementos finitos (MEF). Para uma introdução detalhada ao MEF, sugere-se ...

## 5.1 Laminar permanente

Para o problema permanente, a derivada temporal é desprezada, levando-se em conta apenas a variação das variáveis no espaço. O problema do escoamento unidimensional em um canal pode ser então escrito em sua forma forte por:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{em} \quad \Omega = [0, 1] \quad (63)$$

$$u = u_1 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \quad (64)$$

$$u = u_2 \quad \text{em} \quad \Gamma_2 \quad (65)$$

O termo do lado direito da primeira equação representa a derivada segunda da velocidade  $u$ , entretanto o índice 2 não aparece no operador pois, para este caso, a viscosidade cinemática  $\nu = \mu/\rho$  deve ser considerada como função e não uma constante (no caso de  $\nu$  constante, a viscosidade poderia ser retirada da derivada e, então, veríamos a derivada segunda sendo operada em  $u$ ). O termo do lado direito representa a inversa da densidade multiplicada pelo gradiente de pressão na direção  $x$  que para o problema proposto é um dado do problema como verificado nas Eqs.(20 e 21). As demais equações representam as condições de contorno em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , que representam os pontos extremos do domínio  $\Omega = [0, 1]$ , ou seja  $\Gamma_1 = 0$  e  $\Gamma_2 = 1$ <sup>5</sup>.

No Método de Elementos Finitos, a solução é construída sobre sua forma fraca. Por sua vez, esta é encontrada através da ponderação de uma função peso  $w$  na forma forte do problema, ou seja:

$$\int_{\Omega} w \left[ \frac{d}{dx} k \left( \frac{du}{dx} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] d\Omega = 0 \longrightarrow \int_{\Omega} w \left[ \frac{dw}{dx} k \frac{du}{dx} \right] d\Omega = \int_{\Omega} w \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] d\Omega \quad (66)$$

É comum integrarmos por partes as derivadas de mais alta ordem, separando-a em dois termos distintos: um avaliado no interior do domínio e outro avaliado no contorno. Com isso, o termo de derivada segunda toma a forma:

$$\int_{\Omega} w \left[ \frac{d}{dx} k \left( \frac{du}{dx} \right) \right] d\Omega = - \left( wk \frac{du}{dx} \right) \Big|_{\Omega} + \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \left( k \frac{du}{dx} \right) d\Omega \quad (67)$$

Com isso, a equação final depois da integração por partes e substituindo o domínio  $\Omega$  pelo seu intervalo geométrico, obtém-se:

$$- \left( wk \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{dw}{dx} \left( k \frac{du}{dx} \right) dx = \int_0^1 w \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] dx \quad (68)$$

Note que até este momento não houve quaisquer aproximações das funções e o problema ainda não foi discretizado. O próximo passo para a solução da equação diferencial é minimizar o resíduo que é obtido quando se substitui a função desconhecida  $u(x)$  e o peso  $w(x)$  por soluções aproximadas do tipo  $\hat{u}(x)$  e  $\hat{w}(x)$  respectivamente, na forma fraca da equação. Estas soluções aproximadas são definidas através de uma combinação linear de funções do tipo:

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^v N_i(x) u_i \quad (69)$$

<sup>5</sup>A utilização das letras  $\Omega$  e  $\Gamma$  para representação simbólica do domínio do problema é prática recorrente em problemas matemáticos.  $\Omega$  representa espaço  $R^n$ , então  $\Gamma$  consequentemente representa o espaço  $R^{n-1}$ . Exemplo: Se  $\Omega$  representa uma esfera no espaço  $R^3$ ,  $\Gamma$  representa a casca desta esfera, ou seja, a sua superfície limitante, então descrita no espaço  $R^2$ .

$$\hat{w} = \sum_{j=1}^v N_j(x) w_j \quad (70)$$

Note que o limite superior do somatório  $v$  representa o número total de nós da malha computacional<sup>6</sup> (a ser definido posteriormente). Substituindo as funções de aproximação na formulação fraca apresentada pela Eq.(68) obtemos:

$$-N_j(x) w_j k \frac{dN_i(x) u_i}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 \sum_{j=1}^v \frac{dN_j(x) w_j}{dx} k \sum_{i=1}^v \frac{dN_i(x) u_i}{dx} dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^v N_j(x) w_j \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] dx \quad (71)$$

Note que  $w_j$  está presente em todos os termos da equação e pode ser eliminado, uma vez que  $w_j$  são coeficientes constantes, apesar de desconhecidos. Rescrevendo a equação e passando o termo avaliado no contorno para o lado direito, obtemos:

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^v \frac{dN_j(x)}{dx} k \sum_{i=1}^v \frac{dN_i(x) u_i}{dx} dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^v N_j(x) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] dx + N_j(x) w_j k \frac{dN_i(x) u_i}{dx} \Big|_0^1 \quad (72)$$

Manipulando-se os sinais de somatório da Eq. (72) e separando os termos que estão multiplicados por  $u_i$  no lado esquerdo e os demais termos no lado direito, chegamos à seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^v \sum_{i=1}^v \left( \int_0^1 \frac{dN_j(x)}{dx} k \frac{dN_i(x) u_i}{dx} dx \right) u_i = \sum_{j=1}^v \int_0^1 N_j(x) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] dx + N_j(1) \frac{dN_i(1) u_i}{dx} - N_j(0) \frac{dN_i(0) u_i}{dx} \quad (73)$$

Note que os termos de contorno são levados para o lado direito apesar de  $u_i$  estar presente, isso se deve ao fato de  $u_i$  no contorno ser prescrito através de condições de contorno. A equação apresentada pode ser escrita em forma tensorial através de um sistema de equações lineares. Considere então que:

$$\sum_{j=1}^v \sum_{i=1}^v \left( \int_0^1 \frac{dN_j(x)}{dx} k \frac{dN_i(x) u_i}{dx} dx \right) \longrightarrow \mathbf{K}_{ij} \quad (74)$$

$$u_i \longrightarrow \mathbf{u}_i \quad (75)$$

$$\sum_{j=1}^v \int_0^1 N_j(x) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] dx \longrightarrow \mathbf{f}_j \quad (76)$$

onde  $u$  tem como componentes os valores nodais  $u_n$ , a matriz  $\mathbf{K}$  e o vetor  $\mathbf{f}$  representados por uma montagem conhecida com *Assembling*:

$$\mathbf{K}_{ij} u_i = \mathbf{f}_j \quad (77)$$

---

<sup>6</sup>Objeto geométrico que define o número de repartições discretas do domínio em elementos e pontos e como eles são conectados entre si.

Matriz de triangulação (vizinhos):

$$IEN = \begin{matrix} & v_1 & v_2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Código para geração da Matriz  $K$ .

---

**Algorithm 1** Algoritmo de ‘assembling’ 1

---

```

1: for  $elem \leftarrow 0, NE$  do            $\rightarrow$  NE = Número total de elementos da malha
2:   for  $i_{local} \leftarrow 0, 2$  do        $\rightarrow i_{local} = [v_1, v_2, v_3]$ 
3:      $i_{global} \leftarrow IEN[elem, i_{local}]$ 
4:     for  $j_{local} \leftarrow 0, 2$  do        $\rightarrow j_{local} = [v_1, v_2, v_3]$ 
5:        $j_{global} \leftarrow IEN[elem, j_{local}]$ 
6:        $K[i_{global}, j_{global}] \leftarrow K[i_{global}, j_{global}] + k_{elem}[i_{local}, j_{local}]$ 
7:     end for
8:   end for
9: end for

```

---

## 6 PARTÍCULAS

Em um escoamento multifásico particulado, a quantidade de partículas sólidas presente em um volume fixo da fase contínua caracteriza a distribuição de partículas no escoamento. Tais partículas podem representar gotas de líquidos, sólidos e bolhas dispersas em um meio que pode ser líquido ou gasoso. Dependendo da distância livre  $L_p$  entre as partículas, o acoplamento entre as fases é maior ou menor. Define-se a distância livre entre centros de partículas por meio da fração volumétrica de partículas  $\alpha_p$  em um elemento cúbico como na Fig. (??).

Considerando que o diâmetro da partícula é  $D_p$ , a seguinte relação pode ser estabelecida para o cálculo da distância livre entre partículas:

$$L_p = D_p \left( \frac{\pi}{6\alpha_p} \right)^{1/3} \quad (78)$$

onde a fração volumétrica é a relação entre o volume da partícula, modelando-a geometricamente como esfera, e o volume do cubo:

$$\alpha_p = \frac{\text{volume da esfera}}{\text{volume do cubo}} = \frac{\pi D_p^3 / 6}{L_p^3} \quad (79)$$

A classificação de sistemas dispersos com partículas sólidas é dividida em duas categorias: **diluídos** ou **densos**.

Em processos reais, as partículas também podem exercer influência sobre o fluido. No entanto, a concentrações de partículas pode ser suficientemente baixa tal que o efeito destas forças no fluido pode ser desprezado, de maneira que o acoplamento entre fluido e partícula se dá apenas no sentido do fluido para as partículas, constituindo um modelo do tipo (*one-way coupling*). Além disso, problemas como o transporte de sedimentos em grandes corpos aquáticos, dispersão partículas de poluição na atmosfera, entre outros, as escalas de comprimento das partículas são muito pequenas em relação às do escoamento da fase contínua. Nestes casos, o conceito de partículas pontuais pode ser empregado, segundo o qual a influência do volume no escoamento pode ser desconsiderada.

A equação de Basset-Boussinesq-Oseen (BBO) relaciona a taxa de variação de quantidade de movimento de uma partícula esférica rígida imersa num campo de velocidade caracterizado por baixo número de Reynolds. Esta equação acopla o movimento das partículas (fase dispersa) ao escoamento do fluido (fase contínua) por meio da transferência de quantidade de movimento linear, modelando a ação do fluido na partícula.

Dada a massa  $M$  de uma partícula pontual, com densidade  $\rho_p$ , diâmetro  $D$  e o campo de velocidade  $\mathbf{v}_p$  (bidimensional), consideremos agora as seguintes três forças atuando na partícula: arrasto (*drag*,  $\mathbf{F}_D$ ), sustentação (*lift*,  $\mathbf{F}_L$ ) e força de “massa acrescida” (*added mass*,  $\mathbf{F}_{AM}$ ), definidas da seguinte forma:

arrasto  $\mathbf{F}_D$ :

$$\mathbf{F}_D = \frac{3\rho}{4D} C_D (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p\| \quad (80)$$

sustentação  $\mathbf{F}_L$ :

$$\mathbf{F}_L = 1.61 \sqrt{\mu \rho_p} D^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p\| \left\| \frac{d\mathbf{u}}{dy} \right\|^{-0.5} \quad (81)$$

added mass  $\mathbf{F}_{AM}$ :

$$\mathbf{F}_{AM} = \rho \frac{\pi D^3}{12} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_p - \mathbf{u}) \quad (82)$$

onde o vetor  $\mathbf{u}$  é o campo de velocidade bidimensional do escoamento (o qual, no caso do canal, é tal que  $\mathbf{u} = u\mathbf{i}$ , i.e., a componente na direção  $y$  é nula). No termo da força de arrasto,  $C_D$  é o coeficiente de arrasto, definido por [10]

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{24}{Re_p}, \text{ para } Re_p < 0,1 \\ C_D &= \frac{24}{Re_p} (1 + 0,14 Re_p^{0,7}), \text{ para } 0,1 \leq Re_p < 1000 \\ C_D &= 0,445, \text{ para } 1000 \leq Re_p < 350000 \end{aligned} \quad (83)$$

onde foi introduzido o número de Reynolds da partícula  $Re_p$  definido por

$$Re_p = \frac{\rho}{\mu} D \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p\| \quad (84)$$

Para estas três forças 80, 81 e 82, a equação BBO é expressa por

$$M \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{3\rho}{4D} C_D (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p\| + 1.61 \sqrt{\mu \rho_p} D^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p\| \left\| \frac{d\mathbf{u}}{dy} \right\|^{-0.5} + \rho \frac{\pi D^3}{12} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_p - \mathbf{u}) \quad (85)$$

cuja solução dentro do intervalo do passo de tempo fornece a velocidade  $\mathbf{v}_p$  da partícula. O *tracking* da partícula pode então ser efetuado por meio do cálculo da posição com a velocidade  $\mathbf{v}_p$ .

Embora não seja o caso do escoamento em canal do qual trata o presente texto, cabe citar ainda a força exercida pelo campo gravitacional na partícula,  $\mathbf{F}_G$ , a qual resulta numa força de empuxo sobre a partícula dada por

gravidade  $\mathbf{F}_G$ :

$$\mathbf{F}_G = (\rho_p - \rho) \pi \frac{D^3}{6} \mathbf{g} \quad (86)$$

Outras forças podem ser incluídas no modelo do movimento da partícula, como influência de campo magnético, campo elétrico, ou a força de Basset. Maiores detalhes podem ser obtidos de Crowe et al. [5].

## 7 TESTES

Uma implementação dos modelos descritos possibilitará os seguintes testes:

- Para um mesmo problema, integre a solução final ao longo do domínio espacial para duas resoluções de malha diferentes. Tente observar o efeito da dissipação numérica. Quanto menor o número de pontos, maior é a quantidade de informação perdida na aproximação das derivadas. Um escoamento mais dissipativo (ainda que falsamente) resultará em valores menores de  $\int_0^L u dy$ .
- Os perfis turbulentos são mais “achatados” do que os laminares, o que é possível de ser explicado a partir da definição do comprimento de mistura. Uma vez que a intensidade da turbulência é proporcional ao número de Reynolds, é possível notar que o perfil se torna mais “achatado” para maiores números de Reynolds.
- A solução do perfil turbulento não representa o escoamento “real”. De fato, uma vez que a solução das equações RANS fornece os campos médios, as flutuações do escoamento não são vistas pelos perfis obtidos da solução de 58.
- Tente reproduzir os perfis da camada limite turbulenta. Calcule a solução permanente do escoamento turbulento e tente observar as subcamadas viscosa e turbulenta.

## A COMO CALCULAR ERRO

Muitas vezes desejamos calcular em que distância uma aproximação se encontra do valor exato da quantidade que estamos medindo. Esta aproximação muitas vezes está associada ao tipo de metodologia que estamos empregando ou simplesmente pelo fato de aproximarmos o valor de uma constante em uma equação. O significado de um erro cometido está estritamente relacionado à magnitude da quantidade medida ou calculada. Para ilustrar este problema, considere o peso de uma mala de viagens 32kg exatamente, porém ao medir o peso desta mala em uma balança analógica verificamos que a leitura do valor é de 31.8kg. Como poderíamos saber se este erro está dentro da tolerância apresentada pelo fabricante da balança?

Erro absoluto = valor aproximado - valor exato

Erro relativo = erro absoluto / valor exato

Normas em vetor:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (87)$$

Em computação científica, três normas destacam-se:

- norma 1:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (88)$$

- norma 2:

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (89)$$

- norma  $\infty$  ou norma *inf*:

$$\|x\|_{\infty} = \mathbf{max}|x_i| \quad (90)$$

Para ilustrar o exemplo, considere os seguintes vetores:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 98 \\ 14 \\ 5.8 \end{bmatrix} \quad (92)$$

Onde  $x$  representa o vetor de valores exatos e  $\hat{x}$  o vetor de valores aproximados. O erro absoluto pode ser calculado nas três normas apresentadas da seguinte forma:

$$\|x - \hat{x}\|_1 == \sum_{i=1}^3 |x_i - \hat{x}_i| = \quad (93)$$

$$\|x - \hat{x}\|_2 == \left( \sum_{i=1}^3 |x_i - \hat{x}_i|^2 \right)^2 = \quad (94)$$

$$\|x - \hat{x}\|_{\infty} == \mathbf{max}_{i=1}^3 |x_i - \hat{x}_i| = \quad (95)$$

## Referências

- [1] G.E. Alves. Co-current liquid-gas flow in a pipeline contactor. *Chemical Process and Engineering*, 50(9): 449–456, 1954.
- [2] O. Baker. Design of pipe lines for simultaneous flow of oil and gas, July 1954.
- [3] V.P. Carey. *Liquid Vapor Phase Change Phenomena*. Taylor & Francis, New York, 2007.
- [4] J.G. Collier and J.R. Thome. *Convective Boiling and Condensation*. Oxford University Press, 1987.
- [5] C.T. Crowe, J.D. Schwarzkopf, M. Sommerfeld, and Y. Tsuji. *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. Taylor & Francis Group, Florida, 2012. ISBN 13:978-1-4398-4051-1.

- [6] Peter A. Davidson, Yukio Kaneda, Keith Moffatt, and Katepalli R. Sreenivasan. *A Voyage Through Turbulence*. Cambridge University Press, 2011.
- [7] Atila P. S. Freire, Philippe P. M. Menut, and Jian Su. *Turbulência*. ABCM - Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 2002.
- [8] G.F. Hewitt and N.S. Hall-Taylor. *Annular Two-Phase Flow*. Pergamon Press, Oxford, 1970.
- [9] G.F. Hewitt and D.N. Roberts. Studies of two-phase flow patterns by simultaneous x-ray and flash photography. Technical report, AERE-M 2159, 1969.
- [10] R. H. Perry and D. W. Green. *Chemical Engineers' Handbook*. McGraw Hill, 1999.
- [11] Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 174:935–982, 1883.
- [12] Osborne Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 186:123–164, 1895.
- [13] J.R. Thome. *Engineering Data Book III*. Wolverine Tube, Inc., Heat and Mass Transfer Laboratory - EPFL, 2008. [www.wlv.com/products/databook/db3/DataBookIII.pdf](http://www.wlv.com/products/databook/db3/DataBookIII.pdf).
- [14] P.B. Whalley. *Boiling, Condensation, and Gas-Liquid Flow*. Oxford University Press, 1987.