Equações difrerenciais ordinárias e álgebra linear
PPG-EM/UERJ

Lista de exercícios No. 1

1. Esboçar as trajetórias no espaço de fases de sistemas cuja dinâmica obedece à equação $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$, com o operador A dado por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Esboçar o campo vetorial $\mathbf{X} \longrightarrow A\mathbf{X}$ no R^3 (os elementos faltantes nas matrizes são iguais a zero):

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad (c) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad (e) \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & -1/2 \end{pmatrix} \qquad (f) \begin{pmatrix} -1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Jordan & Smith – problemas 3, 4, 5 e 7 do capítulo 1.

4. Resolver o problema $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$, com $\mathbf{X}(0) = (\kappa_1, ; \kappa_2, ; \kappa_3)$ e usando as três primeiras matrizes do problema 2.

5. Seja a matriz A conforme (e) no problema 3. Determinar constantes a, b e c tais que a curva $t \longrightarrow \left(a\cos t; b\,\mathrm{sen}\, t; ce^{-1/2t}\right)$ seja solução de $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$.

6. Encontrar duas matrizes deiferentes A e B, tais que a curva

$$\mathbf{X} = \left(e^t, 2e^{2t}, 4e^{2t}\right)$$

satifaça simultaneamente às duas equações diferenciais:

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} \qquad \text{e} \qquad \dot{\mathbf{X}} = B\mathbf{X}$$

7. Seja A uima matriz diagonal, em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero. Mostrar que a equação diferencial $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ tem solução única para cada condição inicial.

8. Sejam $\mathbf{U}(t)$ e $\mathbf{V}(t)$ duas soluções de $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$. Mostrar que a curva $\mathbf{W}(t) = \alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{V}$ é solução da equação diferencial quaisquer que sejam os números reais α e β.

9. Em um modelo simplificado da economia de um país, $\dot{R} = R - \alpha C$, $\dot{C} = \beta\,(R - C - G)$, onde R é a renda nacional, C a taxa de gastos dos consumidores e G, a taxa de gastos do governo. As constantes α e β satisfazem às condições $1 < \alpha < \infty$, $1 \le \beta < \infty$. Mostre que se a taxa de gastos do governo for constante o sistema tem um ponto de equilíbrio e determine as equações linearizadas de evolução de pequenas perturbações em torno desse ponto.

10. Localizar os pontos de equilíbrio e esquematizar o diagrama de trajetórias no espaço de fases de sistemas cuja evolução obedece às seguintes equações:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} - \kappa\dot{x} = 0 \\
&\ddot{x} - 8x\dot{x} = 0 \\
&\ddot{x} = \kappa \quad \text{se} \quad |x| > 1 \quad \text{e} \quad \dot{x} = 0 \quad \text{se } |x| < 1 \\
&\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0 \\
&\ddot{x} - 4\dot{x} + 40x = 0 \\
&\ddot{x} + 3|x| + 2x = 0
\end{aligned}$$

11. Um satélite artificial se desloca ao longo do segmento de reta que une os centros de dois planetas, o primeiro de massa M_1 e o segundo de massa M_2. A distância entre os dois planetas é a. A aceleração do satélite é dada por:

$$\ddot{x} = -\frac{\gamma M_1}{x^2} + \frac{\gamma M_2}{(a - x)^2},$$

onde x é a distância do satélite a um dos planetas. Determine o ponto de equilíbrio da trajetória e as equações de evolução de pequenas perturbações em torno desse ponto.

12. Localizar os ponos de equilíbrio de sistemas que obedecem às equações abaixo e determinar as equações de evolução de pequenas perturbações em torno dos mesmos:

$$\begin{array}{lll}
\dot{x} = x - y & \dot{y} = x + y - 2xy & \\
\dot{x} = y\,e^{y} & \dot{y} = 1 - x^2 & \\
\dot{x} = 1 - xy & \dot{y} = (x - 1)y & \\
\dot{x} = (1 + x - 2y)x & \dot{y} = (x - 1)y & \\
\dot{x} = x - y & \dot{y} = x^2 - 1 & \\
\dot{x} = -6y + 2xy - 8 & \dot{y} = y^2 - x^2 & \\
\dot{x} = 4 - 4x^2 - y^2 & \dot{y} = 3xy & \\
\dot{x} = -y\sqrt{1 - x^2} & \dot{y} = x\sqrt{1 - x^2} & \text{para} \quad |x| \le 1 \\
\dot{x} = \operatorname{sen} y & \dot{y} = -\operatorname{sen} x &
\end{array}$$