Equações difrerenciais ordinárias e álgebra linear
PPG-EM/UERJ

Lista de exercícios No. 3

1. Seja a equação de um oscilador não linear dada por:

$$\ddot{x} + \left(x^2 + \dot{x}^2\right)\dot{x} + \kappa x = 0$$

Determinar os pontos de equilíbrio do sistema, escrever as equações de evolução de pequenas perturbações em torno dos mesmos e encontrar os autovalores e autovetores da matriz do sistema linearizado em torno de cada ponto de equilíbrio.

2. Considere que a interação entre as populações de lobos e de cordeiros seja descrita pelas equações :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\kappa_l - x + q_l y) \\ \dot{y} &= y(\kappa_o - y - q_o x) \end{aligned}$$

onde $\kappa_l = q_l = q_o = 1$ e $\kappa_o = 5$. Obter os pontos fixos da dinâmica e as equações de evolução de pequenas perturbações em torno dos pontos fixos. Em que condições o sistema é conservativo?

3. Determinar os pontos fixos, a estabilidade linear dos mesmos e as trajetórias no espaço de fases do sistema cuja evolução segue a lei:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + x - 2y)x \\ \dot{y} &= (x - 1)y \end{aligned}$$

4. A interação entre duas espécies caça-predador é governada pela pelo modelo determinístico:

$$\begin{aligned} \dot{C} &= (1 - C - P)\,C \\ \dot{P} &= (-1 - P + C)\,P. \end{aligned}$$

Determinar os estados de equilíbrio do sistema, estudar a estabilidade linear dos mesmos e confirmar que a espécie predadora não sobrevive na ausñcia da caça.

5. Seja $A : R^n \longrightarrow R^n$ um operador algébrico linear. Mostrar que:

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$$

6. Mostrar que o sistema cuja evolução obedece à lei:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - x_2 + x_1 \exp\left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + x_2 \exp\left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{aligned}$$

tem um único ponto de equilíbrio e estudar a estabilidade linear desse ponto.

7. Seja $T : R^n \longrightarrow R^n$ um operador algébrico inear. Mostrar que se λ for um autovalor de T e $\mathbf{X}$, o correspondente autovetor, então:

$$\exp(T)\mathbf{X} = \exp(\lambda)\mathbf{X}$$

8. Seja a equação de Duffing, dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - cx^3 = 0$$

Determinar os pontos de equilíbrio do sistema, escrever as equações de evolução de pequenas perturbações em torno dos mesmos e encontrar os autovalores e autovetores da matriz do sistema linearizado em torno de cada ponto de equilíbrio.

9. Sejam A, B e Q, três matrizes quadradas de dimensões $n \times n$, tais que $AQ = QB$, com Q inversível, $\mathbf{V} \in \mathcal{R}^n$ e $\lambda \in \mathcal{R}$. Mostre que:

   - $(\lambda I - A)\, Q = Q\, (\lambda I - B)$;
   - λ é um autovalor de A se e somente se for tambḿ um autovalor de B;
   - $\mathbf{V}$ é autovetor de B, associado ao autovalor λ, se e somente se $Q\mathbf{V}$ for autovalor de A, associado ao autovalor λ.

10. Encontre a solução do sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_2 \\ x_2 &= x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

sujeito à condição inicial $(x_1; x_2)\,(3; 0)$.

11. Encontrar os autovalores e autovetores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

12. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 2 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

cujo polinômio característico é:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^3\,(\lambda + 2 - i)\,(\lambda + 2 + i)$$

reescrever a matriz na base de seus autovetores e autovetores generalizados.